Gravitation relativiste :
une approche simple
basée sur le critère de Schild

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

L'important n'est pas de convaincre, mais de donner à réfléchir (Bernard Werber)

Table des matières

1 Introduction

Après la publication de la théorie de la relativité restreinte par Albert Einstein, il est apparu de manière évidente que l'électromagnétisme de Maxwell était parfaitement compatible avec cette nouvelle théorie ; mais la gravitation de Newton ne l'était pas.

Einstein s'est alors fixé un objectif multiple et très ambitieux : modifier la théorie de Newton pour la rendre compatible avec la relativité restreinte (c'était indispensable), introduire une vitesse limite des interactions (en s'inspirant de l'électromagnétisme), et chercher une généralisation du principe de relativité aux référentiels accélérés.

La solution qu'il a proposée, en 1915, est la relativité générale.

Il a atteint la plupart de ses objectifs : toutes les prédictions de la nouvelle théorie, dans le système solaire, ont été confirmées, et l'étude des pulsars binaires a permis de pousser la précision encore beaucoup plus loin : la déflexion de la lumière par le Soleil (le double de celle prévue par la théorie de Newton) est bien établie, la précession du périhélie (de Mercure d'abord, puis des autres planètes, et des pulsars binaires) est maintenant bien comprise, l'effet Shapiro a été mesuré avec une très grande précision (lors d'une occultation de Mercure par le Soleil, puis par l'étude des pulsars binaires) ; le retard des horloges dans un champ gravitationnel (effet Einstein) est pris en compte dans la technologie du GPS ; l'"anomalie Pioneer", qui a longtemps posé problème, semble aujourd'hui résolue. Hors du système solaire, les mirages gravitationnels sont fréquemment observés, les trous noirs sont traqués et des "candidats" de plus en plus nombreux ont été repérés (même si leur nature exacte soulève des questions), et sont activement étudiés ; les ondes gravitationnelles n'ont pas encore pu être détectées directement, mais l'étude des pulsars binaires apporterait, dit-on, une confirmation indirecte.

Cependant, beaucoup de physiciens estiment que la relativité générale n'est pas une théorie définitive. Ils font observer, bien sûr, que la célèbre équation d'Einstein (ou équation des champs) n'a jamais été démontrée ; d'autre part, cinq reproches principaux sont régulièrement formulés :
- les idées développées par Einstein sont incompatibles avec celles de la mécanique quantique : on estime souvent qu'à l'échelle des atomes et des particules élémentaires, des modifications seront nécessaires pour permettre à la relativité générale de s'intégrer dans le contexte quantique ;
- l'apparition de singularités et d'infinis intempestifs est souvent présentée comme un défaut qu'il est urgent de corriger ;
- la nécessité de faire appel à un phénomène aussi incongru que l'inflation pour justifier le big bang (qui est une conséquence logique de la relativité générale) est un problème majeur, qui a été trop souvent minimisé ;
- l'accélération de l'expansion de l'univers, mise en évidence par l'étude des supernovae Ia, impose, dans le contexte de la relativité générale, de recourir à l'énergie sombre, dont l'existence soulève le scepticisme ;
- enfin, l'étude de la rotation des galaxies fait apparaître des phénomènes inattendus, qu'on n'arrive pas à expliquer dans le cadre de cette théorie, à moins d'imaginer la présence d'une grande quantité de matière noire ; présence qui n'est pas en accord avec les observations (en particulier avec la loi empirique de Tully-Fischer).

Pour ces raisons, de nombreuses théories concurrentes ont été développées. Beaucoup d'entre elles ont été éliminées, parce-que leurs prédictions s'écartent des observations ; d'autres sont encore en course.

Le but du présent travail était, à l'origine, d'élaborer une présentation simplifiée et pédagogique de la relativité générale, basée sur des notions physiques simples et concrètes (issues du "critère de Schild") et accessibles à tous.

Je crois avoir atteint ce but ... à un petit détail près : les équations qui sortent spontanément de cette approche ne sont pas celles de la relativité générale ! Elles sont pourtant en parfait accord avec les observations, dans le domaine des champs faibles : en effet, les applications au système solaire conduisent aux mêmes conclusions ; elles expliquent bien, comme nous le verrons, le comportement des pulsars binaires. Mais dès qu'on est en présence de champs forts (au voisinage des trous noirs par exemple), ces équations ne confirment plus du tout celles de la relativité générale. Elles convergent davantage vers la seconde théorie de Ni (1972), que vers celle d'Einstein.

J'ai donc été conduit, par la force des choses, à redéfinir mon projet : plutôt que de conduire le lecteur à la rencontre de la relativité générale, j'ai préféré adopter une position beaucoup plus critique. Le but sera de montrer que certains aspects de la théorie d'Einstein sont incontournables, alors que d'autres sont plus hasardeux. J'essaierai de faire un tri aussi rigoureux que possible entre les certitudes et les hypothèses.

Je précise tout de suite que cette approche ne constitue pas une nouvelle théorie de la gravitation, mais un raccourci permettant d'accéder très rapidement, par des considérations élémentaires et sans faire appel aux tenseurs, au premier palier de la gravitation relativiste. Ce premier palier concerne les champs gravitationnels faibles et lentement variables, tels qu'on les rencontre, en particulier, dans le système solaire, mais aussi dans les systèmes doubles serrés comme les pulsars binaires ; le second palier est celui des champs forts ou rapidement variables. Le premier palier est un domaine où les connaissances sont bien étayées par des observations nombreuses et concordantes ; le second palier est le domaine des points d'interrogation, des hypothèses, parfois de l'imagination, mais surtout des calculs sophistiqués, attendant toujours des confirmations expérimentales. Je ne souhaite pas aborder ce second palier ici ; je chercherai, au contraire, à présenter la gravitation relativiste sous une forme minimale. Ma ligne directrice sera l'économie des moyens.

Sachant qu'il existe une théorie synthétique, grande, belle, harmonieuse et

complète de la gravitation (la relativité générale d'Einstein), alors pourquoi proposer une approche minimaliste et incomplète, pour présenter la gravitation "par le petit bout de la lorgnette" ? Voici les raisons principales :
- la première, c'est que l'harmonie de la relativité générale n'est qu'apparente ; en effet, cette théorie s'harmonise merveilleusement bien avec elle-même, mais ne s'harmonise pas du tout avec le reste de la physique ;
- la seconde, c'est que la démarche scientifique ne consiste pas à commencer par la synthèse, mais par l'observation et l'expérimentation, pour en tirer, patiemment, des conclusions partielles, qui conduiront peut-être, après un long cheminement et beaucoup d'efforts, vers une synthèse, définitive ou non. On peut penser ici à l'électromagnétisme : les travaux de nombreux physiciens (Ampère, Watt, Volta, Fresnel, et tant d'autres) ont été nécessaires avant qu'une synthèse puisse enfin être réalisée par Maxwell ;
- la troisième est plus pédagogique : un étudiant qui se plongerait dans les équations de Maxwell sans avoir étudié auparavant les travaux de ses prédécesseurs n'en tirerait qu'une vision abstraite de l'électromagnétisme, et non une compréhension profonde. Il en est de même pour la gravitation : il est essentiel de savoir quelles sont les expériences ou les observations dont nous disposons à ce jour, pour comprendre quelles sont les options qui s'offrent aux chercheurs, et comment elles peuvent être départagées.

Au cas où un étudiant découvrirait mon travail au cours de ses recherches sur internet, je lui conseillerais de le lire, non pas pour remplacer ou "contrer" l'enseignement de ses professeurs (qui détiennent la vérité officielle, celle qu'il faut étudier et connaître en priorité), mais comme un complément, ou une première approche. Ils y trouveront des explications très simples de nombreux phénomènes, présentés de manière concrète et accessible, probablement plus compréhensible que des cours abstraits basés sur les tenseurs. Mais surtout, ils pourront apprendre à exercer leur esprit critique, ce qui est la base de la méthode scientifique.

2 Approche préliminaire

A partir d'ici, on pourra imaginer un mobile ponctuel (une "planète") de masse m, tournant autour d'un corps central immobile (le "Soleil"), également ponctuel, de masse M ; on supposera m négligeable par rapport à M ; le mouvement se faisant dans un plan, on se limitera à deux dimensions spatiales (auxquelles il faut ajouter, bien sûr, une dimension temporelle) : on travaillera donc dans un espace-temps à trois dimensions. Le fait que le So-

leil soit immobile nous permettra de raisonner sur un champ gravitationnel statique, ce qui nous dispensera, au moins dans un premier temps, de faire intervenir sa vitesse de propagation.

Dans la théorie de Newton, trois formules jouent un rôle central : la première (appelée loi de la gravitation universelle) permet d'exprimer la force qui s'exerce entre deux corps massifs, la seconde exprime la conservation de l'énergie, la troisième la conservation du moment cinétique. Ces trois formules ne sont pas indépendantes : historiquement, la seconde et la troisième ont été démontrées à l'aide de la première, qui joue le rôle de pilier de la gravitation newtonienne. C'est sur elle que se base tout notre travail. Nous examinerons ses conséquences, pour voir si elles sont compatibles avec la relativité restreinte.

Selon la loi de la gravitation universelle, la planète subit une force attractive dirigée vers le Soleil, proportionnelle à m et à M, et inversement proportionnelle au carré de la distance (ou du rayon vecteur) r :

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u},$$

où G est la constante de la gravitation, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du Soleil vers la planète.

Nous noterons $\vec{v}$ la vitesse, et $\vec{w}$ la rapidité du mobile considéré (la planète). Comme l'accélération $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$ s'obtient en divisant $\vec{F}$ par m, on peut écrire :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}.$$

Il s'agit bien, ici, de $\vec{\Gamma}$ ($\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$) et non de $\vec{\gamma}$ ($\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$) !

Si vous désirez plus d'informations sur la différence entre vitesse et rapidité, et sur l'origine de la formule $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$ (c'est suffisamment important pour mériter une étude approfondie), vous pouvez vous reporter à mon site sur la relativité restreinte : Les vitesses en Relativité restreinte.pdf, et plus particulièrement à la fin de la section intitulée "Quelques mots sur la mécanique relativiste".

Remarquons bien que l'introduction de la notion de rapidité n'est pas nécessaire à notre raisonnement : tous les calculs peuvent se faire avec des vitesses. Mais les rapidités permettent de simplifier ces calculs de manière appréciable, à condition de ne pas être rebuté par les fonctions hyperboliques. Si on préfère les vitesses, on se rappellera que $ch\frac{w}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ et que $sh\frac{w}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Rappelons brièvement quelques formules essentielles (en nous limitant à une dimention spatiale) ; en relativité restreinte, on a (en notant m la masse d'un mobile, m_0 sa masse au repos, v sa vitesse dans un référentiel donné, w sa rapidité, p son impulsion, E son énergie) :

$$\begin{cases} m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \ ch\frac{w}{c} \ ; \\ \\ p = m \ v = m_0 \ c \ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \ c \ sh\frac{w}{c} \ ; \\ \\ E = m \ c^2 = \frac{m_0 \ c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \ c^2 \ ch\frac{w}{c}. \end{cases}$$

La force étant définie, comme en mécanique classique, par : $F = \frac{dp}{dt}$, on a :

$F = \frac{dp}{dt} = m_0 \ c \ \frac{d}{dt}\left(sh\frac{w}{c}\right) = m_0 \ c \ ch\frac{w}{c} \ \frac{dw}{c \ dt} = m_0 \ ch\frac{w}{c} \ \frac{dw}{dt} = m \ \ \frac{dw}{dt}$.

Plus généralement :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \ \ \frac{d\vec{w}}{dt}.$$

Fermons cette parenthèse et revenons à la gravitation. Si le vecteur $\vec{w}$ fait un angle α avec $\vec{u}$ (vecteur unitaire dirigé du Soleil vers la planète), on peut écrire (en notant w le module de $\vec{w}$) :

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{GM}{r^2} cos \ \alpha.$$

Remarquons que la masse m n'intervient pas dans cette formule : dans un champ gravitationnel, tous les corps subissent la même accélération, quelle que soit leur masse. Cette particularité du champ gravitationnel est "extraordinaire" : on peut facilement étudier la gravitation en éliminant la notion de force, pour conserver seulement l'accélération ; d'ailleurs, les physiciens ont l'habitude de parler de l'accélération de la pesanteur, et non de la force de la pesanteur ! Pour les champs associés aux interactions électromagnétique, faible et forte, l'élimination de la force n'est pas possible. De là à dire que la gravitation n'est pas une force, il n'y a qu'un pas, qu'il est tentant de franchir ; cependant, nous ne le franchirons pas : dans un premier temps au moins, pour rester en conformité avec la formulation newtonienne, nous conserverons la notion de force.

Voici donc notre choix initial sur lequel s'appuie tout le travail qui va suivre : nous resterons le plus près possible de la gravitation newtonienne, et nous conservons sa pierre angulaire (la loi de la gravitation universelle), à savoir une force d'attraction proportionnelle à la masse de chacun des deux corps, et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Mais toutes les conséquences de cette loi (à commencer par la conservation de l'énergie) seront reformulées dans un cadre relativiste.

La conservation de l'énergie, dans la théorie de Newton, s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + m\Phi$$

où $\frac{1}{2}mv^2$ représente l'énergie cinétique de la planète, $-\frac{GmM}{r}$ son énergie potentielle, et Φ le potentiel gravitationnel.

Cette formule doit être profondément remaniée pour être cohérente avec la relativité restreinte. Nous allons reprendre sa démonstration au point de départ, c'est-à-dire à partir de la loi de la gravitation universelle.

En dérivant $ch\frac{w}{c}$ par rapport à t, on obtient, en notant α l'angle formé par le vecteur vitesse $\vec{v}$ avec le rayon vecteur $\vec{u}$:

$$\frac{d}{dt}ch\frac{w}{c} = sh\frac{w}{c}\frac{dw}{cdt} = \frac{v}{c}ch\frac{w}{c}\ \frac{-GM}{cr^2}cos\alpha \ ;$$

$$\frac{d}{dt}ch\frac{w}{c} = ch\frac{w}{c}\ \frac{-GM}{c^2r^2}vcos\alpha = ch\frac{w}{c}\ \frac{-GM}{c^2r^2}\frac{dr}{dt}.$$

Posons : $k = \frac{GM}{c^2}$. On a donc : $\frac{k}{r} = \frac{GM}{rc^2} = -\frac{\Phi}{c^2}$. Ce nombre k dépend de G et c (constantes), ainsi que de M, que nous supposerons (provisoirement) fixé. On a alors :

$$\frac{d}{dt} ch\frac{w}{c} = ch\frac{w}{c}\ \frac{-k}{r^2}\frac{dr}{dt}\ ;$$

$$\frac{d}{dt} ch\frac{w}{c} = ch\frac{w}{c}\frac{d\frac{k}{r}}{dt}\ ;$$

$$\frac{d\ ch\frac{w}{c}}{ch\frac{w}{c}} - d\frac{k}{r} = 0\ ;$$

$$d(Log\ ch\frac{w}{c}) + d(Log\ e^{-\frac{k}{r}}) = 0\ ;$$

$$Log(ch\frac{w}{c}\ e^{-\frac{k}{r}}) = constante\ ;$$

$$ch\frac{w}{c}\ e^{-\frac{k}{r}} = constante.$$

En l'absence de champ gravitationnel, l'énergie du mobile est donnée par la formule : $E = m_0c^2 ch\frac{w}{c}$; dans le champ gravitationnel, la formule devient :

$$E = m_0c^2\ ch\frac{w}{c}\ e^{-\frac{k}{r}} = m_0c^2\ ch\frac{w}{c}\ e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

Cette formule va jouer un rôle fondamental dans tout notre travail ; pour cette raison, nous conseillons à nos lecteurs de relire et d'analyser sa démonstration ; ceux qui n'adhèrent pas à cette entrée en matière peuvent se dispenser de lire la suite !

Il est clair que cette formule est équivalente à la précédente quand r tend vers l'infini ; mais, à la différence de cette dernière, elle inclut l'énergie potentielle (négative) de la planète.

Notre but va être de déterminer jusqu'où cette formule peut nous mener. Nous allons voir qu'elle nous permet de retrouver un grand nombre de résultats bien connus, et confirmés par les observations, concernant plus particulièrement le système solaire. Mais il n'est pas question de lui attribuer un pouvoir illimité : si on désire l'appliquer à des conditions "exotiques" (qu'on ne rencontre pas dans le système solaire), il faudra l'analyser, l'interpréter, et sans doute la corriger pour la rendre extrapolable à ces situations

extrêmes. Mais en attendant, conservons-la telle qu'elle est, et voyons ce qu'elle contient.

Posons : $E' = m_0 c^2 \; ch\frac{w}{c}$; c'est ce que j'appellerai l'énergie apparente. C'est une expression de l'énergie qui prend en compte ses aspects "actuels" : masse et mouvement, mais qui néglige l'énergie potentielle, alors que l'énergie réelle E inclut l'énergie potentielle. Elle est liée à l'énergie réelle E par l'égalité : $E' = E\; e^{\frac{k}{r}}$. On a donc : $E'\; e^{-\frac{k}{r}} = constante$. En l'absence de champ gravitationnel (ou lorsque r tend vers l'infini), l'énergie apparente se confond avec l'énergie réelle ; mais quand r tend vers 0, E' tend vers l'infini (donc la rapidité w aussi), alors que E reste constante.

Une question qu'on peut légitimement se poser est la suivante : la relativité restreinte fait la distinction entre la masse au repos m_0 et la masse maupertuisienne $m = m_0 \; ch\frac{w}{c} = \frac{E'}{c^2}$. Dans tout ce qui précède, c'est la masse maupertuisienne m que nous avons utilisée : nous avons écrit la loi de Newton sous la forme $\vec{F} = -\frac{G\; m\; M}{r^2}\vec{u}$, et non $\vec{F} = -\frac{G\; m_0\; M_0}{r^2}\vec{u}$. Est-ce justifié ? Bien sûr, on a $M = M_0$, puisque le corps central (le Soleil) est supposé immobile ; la seule question est de savoir si le mobile (planète ou particule-test) réagit au champ en fonction de sa masse au repos m_0 ou de sa masse maupertuisienne $m = \frac{E}{c^2}$.

Comme les photons, qui ont une masse au repos nulle, subissent l'influence de la gravitation (ceci a été prouvé pour la première fois en 1959 par Pound et Rebka, qui ont mesuré le décalage vers le rouge d'un rayonnement se déplaçant de bas en haut dans le champ de gravité terrestre), il ne fait aucun doute que c'est la masse maupertuisienne m qui intervient. Pour un photon, on a : $m = \frac{E'}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \neq 0$.

On peut considérer que le Soleil génère un champ d'accélérations, et non un champ de forces : c'est la quantité $\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$ (et non $\vec{F}$) qui est indépendante de la particule-test.

Pour la lumière, l'équivalent de l'énergie apparente est $E' = h\nu$ (où ν désigne la fréquence du rayonnement) ; donc $E'\; e^{-\frac{k}{r}} = h\nu\; e^{-\frac{k}{r}} = constante$. Comme la période est $T = \frac{2\pi}{\nu}$, on a, bien sûr : $T\; e^{\frac{k}{r}} = constante$. Quand r tend vers 0, la fréquence ν tend vers l'infini, la période T et la longueur d'onde $\lambda = cT$ tendent vers 0. On peut écrire aussi : $\nu = \nu_\infty\; e^{\frac{k}{r}}$, $T = T_\infty\; e^{-\frac{k}{r}}$ et $\lambda = \lambda_\infty\; e^{-\frac{k}{r}}$ (où ν_∞, T_∞ et λ_∞ sont la fréquence, la période et la longueur d'onde limites quand r tend vers l'infini, autrement dit quand le rayonnement

s'échappe du champ de gravitation).

Le choix de conserver la loi de la gravitation universelle telle qu'elle a été formulée par Newton (à partir de la notion de force) n'est pas anodin : il implique que l'accélération à prendre en compte dans l'attraction gravitationnelle est $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ et non $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Entre autres conséquences, ceci va entraîner que la vitesse de libération à la surface d'un corps pesant sera toujours inférieure à c ; nous en reparlerons au sujet des trous noirs. Une autre conséquence importante est qu'il sera plus facile, par la suite, d'établir des ponts entre la gravitation et les autres forces de la nature (même si la gravitation n'est pas une force comme les autres) ; en effet, si on choisit de "jeter" la notion de force pour lui substituer d'emblée l'accélération et la géométrie de l'espace-temps, on risque de casser le dialogue nécessaire avec la mécanique quantique.

Dans ce travail, nous raisonnerons le plus souvent comme si le champ gravitationnel en question était celui du Soleil ; précisons donc la valeur de k pour ce champ particulier, ainsi que celle du rapport $\frac{k}{r}$, qui interviendra souvent dans les équations.

Comme en gravitation newtonienne, nous appellons potentiel gravitationnel la quantité (négative) : $\Phi = -\frac{GM}{r}$. Nous dirons qu'un champ est fort si le nombre $\|\Phi\|$ est grand.

La masse du Soleil est $M \approx 1,9891.10^{30}\ kg$; la constante de la gravitation est $G \approx 6,6742.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$; et la vitesse de la lumière : $c \approx 2,99792.10^8\ m.s^{-1}$; donc :

$$k = \frac{GM}{c^2} \approx \frac{6,6742.10^{-11}.1,9891.10^{30}}{8,9875.10^{16}} \approx 1,47.10^3\ m.$$

Si on note $r = r_t \approx 1,5.10^{11}\ m$ le rayon de l'orbite terrestre, par exemple, le nombre $\frac{k}{r}$ qui apparaît dans les équations vaudra : $\frac{k}{r} \approx \frac{1,47.10^3}{1,5.10^{11}} \approx 10^{-8}$, donc $\left(\frac{k}{r}\right)^2 \approx 10^{-16}$, $\left(\frac{k}{r}\right)^3 \approx 10^{-24}$, etc. Quand on étudiera l'action du champ gravitationnel du Soleil sur la Terre (ou sur une autre planète), on ne pourra pas négliger $\frac{k}{r}$ (ce serait négliger la gravitation !) mais on pourra sans crainte négliger ses puissances.

Si on note $r = r_s \approx 6,96.10^8\ m$ le rayon du Soleil, on aura : $\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} \approx \frac{1,47.10^3}{6,96.10^8} \approx 2.10^{-6}$, $\left(\frac{k}{r}\right)^2 \approx 4.10^{-12}$, $\left(\frac{k}{r}\right)^3 \approx 8.10^{-18}$, etc. Ceci montre qu'à la

surface du Soleil, les puissances de $\frac{k}{r}$ seront très vite négligeables.

Considérons maintenant une étoile à neutrons ayant pour masse $1,4$ fois la masse du Soleil, et pour rayon 14 km. A sa surface, on aura : $k \approx 1,4\ .\ 1,47.10^3 \approx 2,058.10^3$ m, et $r = 1,4.10^4$ m, donc $\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} \approx 0,147$; $\left(\frac{k}{r}\right)^2 \approx 0,0216$; $\left(\frac{k}{r}\right)^3 \approx 0,0032$; $\left(\frac{k}{r}\right)^4 \approx 0,00047$; $\left(\frac{k}{r}\right)^5 \approx 0,00007$; ... Il faudra donc être très prudent avant de négliger des puissances de $\frac{k}{r}$ à la surface d'une étoile à neutrons ! Nous sommes ici dans le domaine des champs gravitationnels forts ...

Revenons à la surface de la Terre. La masse de notre planète est $M \approx 6.10^{24}\ kg$; son rayon est $r \approx 6,37.10^6\ m$; donc :

$$\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} = \frac{GM}{r\ c^2} = \frac{6,67.10^{-11}.6.10^{24}}{6,37.10^6.9.10^{16}} \approx 0,7.10^{-9}.$$

On voit donc qu'à la surface de la Terre, le champ créé par la Terre elle-même ($\frac{\|\Phi\|}{c^2} \approx 0,7.10^{-9}$) est un peu inférieur au champ créé par le Soleil ($\frac{\|\Phi\|}{c^2} \approx 10^{-8}$).

Etudions maintenant le champ créé par notre Galaxie (la Voie Lactée) à la surface de la Terre. Imaginons par exemple une masse de 3.10^{11} soleils (évaluation raisonnable ?) concentrée au centre de la Galaxie, à une distance de 28000 AL, soit $2,6.10^{20}\ m$. On a alors :

$$\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} = \frac{GM}{r\ c^2} = \frac{6,67.10^{-11}.2.10^{30}.3.10^{11}}{2,6.10^{20}.9.10^{16}} \approx 1,7.10^{-6}.$$

Le potentiel gravitationnel créé par la Galaxie dans le voisinage de la Terre dépasse largement celui qui est dû au Soleil. (Bien entendu, il ne faut pas confondre ce potentiel avec la force d'attraction.)

On pourrait étudier ensuite la contribution des galaxies voisines (groupe local), qui est non négligeable, puis celle des galaxies lointaines ; pour ces dernières, le calcul est délicat : il fait intervenir la masse moyenne des galaxies, leur répartition dans l'espace, leur âge, leur vitesse de fuite due à l'expansion de l'Univers... Si les galaxies étaient en nombre infini, réparties uniformément dans l'espace et dans le temps, dans un Univers statique, leur contribution totale au champ gravitationnel serait infinie, ce qui nous poserait de sérieux problèmes : tous les calculs qui suivent seraient caducs. Mais la faible luminosité du ciel nocturne (voir le paradoxe d'Olbers : "pourquoi le ciel est-il

noir la nuit ?") suggère que le champ gravitationnel total pourrait bien être faible aussi ; mais le paradoxe d'Olbers concerne la lumière, dont l'intensité est en $\frac{1}{r^2}$, alors que le potentiel gravitationnel est en $\frac{1}{r}$. Le calcul reste à faire.

3 Le paradoxe de Schild

Jusqu'ici, le rapprochement de la gravitation newtonienne et de la relativité restreinte a semblé se passer de manière simple, facile et naturelle ; mais nous allons voir surgir un paradoxe qui va nous conduire à envisager la possibilité d'un espace-temps courbe : c'est le "critère" (ou paradoxe) de Schild.

De même que le paradoxe de Michelson est la porte d'entrée de la relativité restreinte, je considère le paradoxe de Schild comme la voie royale pour aborder la relativité générale.

Historiquement, ce n'est pas cette porte qu'Einstein a empruntée lorsqu'il s'est attaqué à la gravitation ; en effet, le travail de Schild (A. Schild, Evidence for gravitational theories, Academic Press, 1961) est bien postérieur.

De quoi s'agit-il ?

Le paradoxe de Schild s'appuie sur l'analyse de l'expérience de Pound et Rebka. Ces deux physiciens, par un procédé très astucieux, ont réussi à mesurer la perte d'énergie d'un rayon lumineux se déplaçant de bas en haut, du pied d'une tour jusqu'à son sommet. Cette perte d'énergie est due à l'action de la gravité terrestre : la lumière doit lutter contre elle pour atteindre le sommet de la tour.

Pour notre part, nous imaginerons un observateur envoyant un rayon lumineux en direction du Soleil. Cet observateur est supposé immobile par rapport au Soleil, et suffisamment éloigné de celui-ci pour qu'il soit possible de négliger l'action de la gravité solaire à cette distance. Nous l'appellerons l'observateur distant. D'autre part, nous imaginerons, sur le parcours de la lumière, entre l'émetteur (l'observateur distant) et le Soleil, plusieurs autres observateurs, tous immobiles par rapport au Soleil, mais subissant une action non négligeable de la gravité solaire. Nous les appellerons observateurs locaux. La distance par rapport au Soleil sera noté r ; bien entendu, elle n'est pas identique pour tous les observateurs.

Les observateurs locaux sont habilités à faire des observations seulement dans leur voisinage immédiat. Au passage de l'onde lumineuse, ils vont relever sa période T_{loc}, sa longueur d'onde λ_{loc}, et sa vitesse c_{loc}. L'observateur distant se charge de faire la synthèse : il va essayer de reconstituer le déroulement des événements, en les replaçant dans un cadre euclidien (peut-être artificiel, mais qui est destiné à refléter au mieux sa vision des choses). Les mesures établies par cet observateur distant seront notées T_{dist}, λ_{dist} et c_{dist}. Toutes ces mesures sont des fonctions de r.

Conformément au résultat de l'expérience de Pound et Rebka, nous nous attendons à un accroissement de l'énergie apparente de cette onde, au fur et à mesure qu'elle se rapproche du Soleil. Comment cet accroissement de l'énergie va-t-il se manifester ?

Les formules $E = h\nu$, $\nu = \frac{E}{h}$, $T = \frac{1}{\nu} = \frac{h}{E}$, $\lambda = cT = \frac{hc}{E}$ permettent de prévoir qu'un accroissement de l'énergie apparente va se traduire par une diminution de la période et de la longueur d'onde. Dans le cadre de la physique classique, nous nous attendons donc aux résultats suivants :
- résultats des observateurs locaux : on peut penser que la vitesse de la lumière c_{loc} est constante, et que la période T_{loc} et la longueur d'onde λ_{loc} diminuent quand le rayonnement se rapproche du Soleil (c'est-à-dire quand r décroît) ;
- synthèse de l'observateur distant : on s'attend aux mêmes résultats, autrement dit : c_{dist} est constante, T_{dist} et λ_{dist} diminuent quand r décroît.
D'après ce que nous avons vu dans notre approche préliminaire, on peut même préciser que T_{loc}, λ_{loc}, T_{dist} et λ_{dist} vont décroître proportionnellement à $e^{-\frac{k}{r}}$.

Mais ces conclusions naïves vont s'écrouler comme un château de cartes. Elles vont se heurter à trois problèmes qui vont en avoir raison. Nous serons obligés de faire de profonds réajustements, et ceci en trois temps.

Le premier problème, le plus fondamental, constitue le noyau du paradoxe de Schild : la période T_{dist} ne peut pas être décroissante.

Imaginez des voitures roulant à 120 km/h sur une autoroute, régulièrement espacées (de 100 m par exemple) ; si, pour cause de travaux, elles doivent réduire leur vitesse à 60 km/h, la distance entre deux voitures successives passera de 100 m à 50 m, tandis que l'intervalle de temps (chronométré par un observateur immobile au bord de la route) ne changera pas. De la même

façon, l'intervalle de temps entre deux maxima successifs de l'onde (donc la période T) ne peut pas varier le long de la trajectoire ! Il est essentiel de bien comprendre ce problème, car toute la suite en découle... On peut imaginer une vitesse de la lumière variable le long du parcours (comme pour les voitures de notre exemple), mais ceci ne change rien au problème. Celui-ci serait résolu si les différents chronométreurs étaient en mouvement les uns par rapport aux autres, mais dans notre expérience imaginaire, comme dans celle (bien réelle) de Pound et Rebka, ils sont immobiles...

4 Ralentissement des horloges dans un champ gravitationnel

Comment sortir de cette impasse ? C'est en fait assez simple. Rappelons-nous l'idée proposée par Einstein pour résoudre le paradoxe de Michelson : deux observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre travaillent avec des règles et des horloges différentes. Pour résoudre le paradoxe de Schild, il suffit d'admettre que l'observateur distant et l'observateur local travaillent, eux aussi, avec des règles et des horloges différentes. Dans l'univers tel qu'il est reconstitué par l'observateur distant, le rayon lumineux ne change pas de période lorsqu'il se propage vers l'observateur local ; mais celui-ci croit mesurer une période plus courte parce-que son horloge de référence est plus lente que celle de l'observateur distant. Et c'est, bien entendu, le champ gravitationnel qui est responsable de cette distorsion.

En nous engageant dans cette voie, nous sommes en train d'admettre, d'une certaine manière, la courbure de l'espace-temps (même si nous ne savons pas s'il s'agit d'une courbure réelle, ou seulement d'une illusion due à la modification des règles et des horloges). Cette innovation majeure de la relativité générale a été fortement critiquée à l'époque où la théorie a été proposée par Einstein ; mais ensuite, divers physiciens (et plus particulièrement Schild, pour qui la courbure était une évidence) ont réuni une argumentation forte à l'appui de cette conception de l'espace-temps. Mais, comme on le verra, les arguments de Schild peuvent être interprétés de plusieurs manières...

D'après ce que nous venons de dire, le coefficient de ralentissement de l'horloge locale, par rapport à l'horloge distante, est : $e^{-\frac{k}{r}}$, autrement dit : $e^{\frac{\Phi}{c^2}}$.

Nous devons bien intégrer le fait que l'intervalle spatio-temporel (intervalle d'univers) entre deux événements très proches ne va pas être évalué de la même façon par nos deux observateurs (local et distant).

En ce qui concerne l'intervalle temporel, on aura donc :

$$dt_{loc} = e^{-\frac{k}{r}} dt_{dist} = e^{\frac{\Phi}{c^2}} dt_{dist}.$$

5 Contraction des règles dans un champ gravitationnel

Etudions maintenant l'intervalle spatial.

On admettra facilement que toute mesure de longueur se ramène à une comparaison avec la longueur d'onde d'un rayonnement de référence, ce qui soulève un second problème : λ_{loc} ne peut pas décroître comme nous l'avions prévu. En effet, les observateurs locaux échelonnés sur le parcours du rayon lumineux seront tous d'accord pour dire que la longueur d'onde de ce rayonnement est constante ; car, même si elle était variable le long de la trajectoire, nos observateurs seraient incapables de mettre ces variations en évidence, puisque tous les rayonnements de référence seraient affectés dans les mêmes proportions.

Mais l'observateur distant, lui, estime que le rayonnement gagne de l'énergie en se dirigeant vers le Soleil ; pour lui, la période est constante, donc c'est la longueur d'onde qui trahit la variation d'énergie : la longueur d'onde diminue. Mais cette diminution n'est pas enregistrée par les observateurs locaux, parce-qu'ils utilisent des règles de plus en plus courtes lorsqu'on se rapproche du Soleil. Par rapport à l'observateur distant, les observateurs locaux surestiment les distances :

$$dx_{loc} = e^{\frac{k}{r}}\ dx_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}\ dx_{dist}\ ;$$
$$dy_{loc} = e^{\frac{k}{r}}\ dy_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}\ dy_{dist}.$$

Le rayonnement gagne bien de l'énergie (au moins de l'énergie apparente) en se dirigeant vers le Soleil ; pour l'observateur distant, ce gain d'énergie ne peut pas se traduire par une variation de la période, mais seulement par une variation de la longueur d'onde. Pour les observateurs locaux, il ne peut pas se traduire par une variation de la longueur d'onde, mais seulement de la période.

Par rapport à l'observateur distant, les observateurs locaux utilisent des règles plus courtes et des horloges plus lentes. Ces modifications sont, pour ainsi dire, inverses. C'est là toute la subtilité du paradoxe de Schild !

La relativité restreinte nous apprend que les mesures de longueurs et de durées sont subjectives, parce-que les règles et les horloges varient en fonction de l'état de mouvement de l'observateur. En admettant que ces règles et horloges varient aussi en fonction du potentiel, nous jetons les bases d'une gravitation relativiste, qui est le prolongement naturel de la relativité restreinte.

6 Matrices de changement de potentiel

Pour résumer ce qui vient d'être dit, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} dt_{loc} \\ dx_{loc} \\ dy_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{k}{r}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{k}{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\Phi}{c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k}{r}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{k}{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{loc} \\ dx_{loc} \\ dy_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{loc} \\ dx_{loc} \\ dy_{loc} \end{pmatrix}.$$

Notons bien que les matrices que nous utilisons ici (que j'appellerai "matrices de changement de potentiel") sont valables lorsqu'on passe d'un observateur local à un observateur distant (ou l'inverse), ou bien (par composition) lorsqu'on passe d'un observateur local à un autre observateur local. Mais ces observateurs ne sont pas des observateurs quelconques : ce sont des observateurs immobiles par rapport au Soleil. Ceci soulève des questions : que se passe-t-il lorsque les observateurs ne sont pas immobiles ? Que devient la notion d'immobilité lorsqu'on étudie le champ gravitationnel créé par plusieurs corps en mouvement ? Les matrices de changement de potentiel sont-elles

compatibles avec la transformation de Lorentz ? Nous en reparlerons plus loin.

Si nous considérons, non plus un observateur distant et un observateur local, mais deux observateurs locaux différents loc_1 et loc_2 (tous deux immobiles par rapport au Soleil), situés dans des potentiels quelconques, alors il sera possible de passer successivement de l'observateur loc_1 à l'observateur distant, puis de l'observateur distant à l'observateur loc_2, par une composition de matrices :

$$\begin{pmatrix} dt_2 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} dt_2 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\frac{-\Phi_1}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Phi_1}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi_1}{c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt_1 \\ dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} dt_2 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\Phi_1-\Phi_2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Phi_1-\Phi_2}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi_1-\Phi_2}{c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt_1 \\ dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix} .$$

Pour passer d'un observateur local à un autre, on pourra donc utiliser les mêmes matrices de changement de potentiel que pour passer d'un observateur local à un observateur distant, à condition de considérer que Φ désigne la différence de potentiel entre les deux observateurs. On pourra même prendre l'habitude de considérer Φ comme une quantité relative : $\Phi = \Phi_{mob} - \Phi_{obs}$, où Φ_{mob} désigne le potentiel gravitationnel dans lequel se trouve le mobile observé (par exemple la planète), et Φ_{obs} le potentiel dans lequel se trouve l'observateur. C'est cette différence de potentiel, interposée entre l'observateur et la scène observée, qui joue le rôle de verre déformant.

7 Evaluation des vitesses en fonction du potentiel

Voyons maintenant l'évaluation des vitesses.

Voici le troisième problème : si nous disons que T_{dist} est constant et que λ_{dist} est multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$, sachant que $c_{dist} = \frac{\lambda_{dist}}{T_{dist}}$, nous en déduisons que c_{dist} est multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$. De même, si nous disons que T_{loc} est multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$ et que λ_{loc} est constant, sachant que $c_{loc} = \frac{\lambda_{loc}}{T_{loc}}$, nous en déduisons que c_{loc} est divisé par $e^{-\frac{k}{r}}$.

Ce raisonnement est inexact, car λ_{dist} n'est pas multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$ dans l'absolu (un absolu qui n'existe pas !), mais par rapport à λ_{loc}. De même, T_{loc} n'est pas multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$ dans l'absolu, mais par rapport à T_{dist}.

En réalité, comme nous l'enseigne la relativité restreinte, tout observateur, mesurant la vitesse de la lumière dans son voisinage, obtiendra un résultat rigoureusement égal à la constante c ; on a donc : $c_{loc} = c$.

Si un observateur local calcule la vitesse d'un mobile par la formule : $v_{loc} = \frac{dl_{loc}}{dt_{loc}}$, alors l'observateur distant évaluera la même vitesse de la façon suivante : $v_{dist} = \frac{dl_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dl_{loc}}{e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{loc}} = e^{\frac{2\Phi}{c^2}}.v_{loc}$.

La vitesse locale de la lumière sera toujours constante : $c_{loc} = c$; mais sa vitesse évaluée par un observateur distant ne le sera pas : $c_{dist} = c.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$. Par exemple, lorsque la lumière passe dans le voisinage d'un corps massif ($\Phi < 0$), sa vitesse évaluée par un observateur distant sera inférieure à c, de sorte que celui-ci aura l'illusion de voir la lumière ralentir.

La solution du paradoxe de Schild que nous proposons comporte donc trois volets interdépendants et étroitement imbriqués. Le premier est le ralentissement des horloges dans un champ gravitationnel (volet sans lequel l'effet Einstein - voir section suivante - n'existerait pas) ; c'est l'élément central de notre vision du paradoxe de Schild. Le second est la contraction des règles dans un champ gravitationnel (volet sans lequel la déviation de la lumière, ou les mirages gravitationnels, seraient incompréhensibles : voir la section sur la déflexion de la lumière) ; c'est le complément indispensable du premier, sa facette spatiale pour ainsi dire. Le troisième est la constance de la vitesse locale de la lumière (indispensable si nous admettons la validité lo-

cale de la relativité restreinte) ; nous aurions pu commencer par lui, tant il va de soi. Il implique que la vitesse de la lumière, pour un observateur distant, semble varier en fonction du champ gravitationnel. Cette variation apparaîtra de manière spectaculaire dans l'effet Shapiro. Ces trois volets sont (au moins qualitativement) nécessaires ; sont-ils quantitativement satisfaisants, et jusqu'à quel point ? C'est ce que nous allons examiner.

Mais auparavant, soulignons encore une conséquence importante concernant l'évaluation des masses.

8 Evaluation des masses en fonction du potentiel

Dès notre approche préliminaire, nous avons vu apparaître la formule :

$$E = m_0 c^2 \ ch\frac{w}{c} \ e^{-\frac{k}{r}} = m_0 c^2 \ ch\frac{w}{c} \ e^{\frac{\Phi}{c^2}},$$

dans laquelle E est l'énergie d'un mobile évaluée par un observateur distant, et Φ la différence de potentiel entre l'objet observé et l'observateur. Si cet objet est au repos ($w = 0$), la formule devient :

$$E = m_0 c^2 \ e^{-\frac{k}{r}} = m_0 c^2 \ e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

L'observateur distant va alors évaluer la masse au repos de ce corps de la façon suivante :

$$m_{rep} = \frac{E}{c^2} = m_0 \ e^{-\frac{k}{r}} = m_0 \ e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

Cet observateur va donc estimer que la masse au repos du mobile est plus faible quand celui-ci est plongé dans un champ gravitationnel plus fort.

Si, de plus, nous supposons que l'observateur est situé dans le même potentiel gravitationnel que le mobile, alors la différence de potentiel Φ s'annule, et on obtient : $m_{rep} = m_0$; on peut donc dire que m_0 est la masse au repos du mobile, évaluée par un observateur lié à ce mobile (ou, au moins, plongé dans un potentiel identique).

Comme on le verra par la suite, l'énergie d'un mobile se déplaçant librement sur une géodésique semblera constante aux yeux de l'observateur distant : les variations de la masse au repos seront compensées exactement

par les variations de la rapidité, le produit $ch\frac{w}{c}\ e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ restant constant sur la trajectoire (en l'absence de cause physique susceptible de le modifier).

9 Effet Einstein

D'après ce que nous venons de voir, un rayon lumineux se dirigeant de bas en haut dans le champ gravitationnel de la Terre doit perdre de l'énergie apparente : sa fréquence doit être décalée vers le rouge (pour un observateur immobile). C'est précisément ce qui a été vérifié par Pound et Rebka en 1959 ; si on analyse leur expérience, on voit qu'ils ont cherché à annuler ce décalage vers le rouge par un effet Doppler opposé (décalage vers le bleu produit par le rapprochement de l'émetteur et du récepteur, à une vitesse soigneusement calculée).

On en déduit qu'une horloge immobile dans un champ gravitationnel doit retarder par rapport à une horloge identique située hors de ce champ. Ceci a été vérifié d'abord dans des avions, puis dans des satellites artificiels : dans ce cas, l'horloge embarquée avance par rapport à celles qui restent à la surface de la Terre, car le champ est plus faible à haute altitude. Cette distorsion (appelée "effet Einstein") est systématiquement prise en compte dans les calculs du positionnement GPS. L'expérience de Pound et Rebka était donc la première (mais non la dernière !) mesure de cet effet Einstein.

En relativité générale, le coefficient de dilatation du temps est $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}}$; ici, nous avons trouvé $e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = e^{\frac{k}{r}}$. On peut remarquer que $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}}$ et $e^{\frac{k}{r}}$ ont le même développement limité au premier ordre en $\frac{k}{r}$; c'est : $1+\frac{k}{r}$; la différence est donc insensible pour r très grand par rapport à k, comme c'est le cas dans l'environnement terrestre, et dans la plupart des situations que nous étudierons.

Mais imaginons que r tende vers $2k$ (ce qui correspond à l'horizon d'un trou noir : nous en reparlerons !). Alors $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}}$ tend vers $+\infty$, tandis que $e^{\frac{k}{r}}$ tend vers $e^{\frac{1}{2}}$, soit $1,649$ environ : pour un observateur distant, un chronomètre situé à la surface d'un trou noir semblera s'arrêter, si c'est la première formule qui est la bonne ; mais si c'est la seconde formule qui est correcte, alors ce chronomètre semblera tourner à $60,6\%$ de sa vitesse normale. Ce n'est pas du tout pareil !

Calculons plus précisément la différence des deux coefficients de dilatation du temps : $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}} - e^{\frac{k}{r}}$;

- à la surface du Soleil ($\frac{k}{r} \approx 0,000002$) :
$\frac{1}{\sqrt{1-0,000004}} - e^{0,000002} \approx 1,000002000006 - 1,000002000002 \approx 4.10^{-12}$. C'est négligeable !

- à la surface d'une étoile à neutrons de $1,4$ masse solaire et 14 km de rayon ($\frac{k}{r} \approx 0,147$) :
$\frac{1}{\sqrt{1-2.0,147}} - e^{0,147} \approx 1,190 - 1,158 \approx 0,032$. (Différence relative : $\frac{0,032}{1,19} \approx 17\%$.)

En théorie, cet écart devrait pouvoir être mis en évidence par l'étude des radiations provenant de la surface des étoiles à neutrons : dans notre modèle, le décalage vers le rouge (redshift gravitationnel) est de 17% moins élevé qu'en relativité générale. Nous en reparlerons dans la section consacrée à la mesure de l'effet Einstein à la surface des étoiles à neutrons.

10 Newton, Einstein, Einstein, Newton...

Avant de continuer, arrêtons-nous un instant pour observer les piliers sur lesquels s'appuie notre réflexion.

Le premier est, bien entendu, la gravitation de Newton : nous avons pris au pied de la lettre la loi de la gravitation universelle.

Le second est la relativité restreinte d'Einstein, théorie incontournable, maintes fois confirmée, devenue un pilier essentiel de la physique, car elle est indispensable à la compréhension de l'électromagnétisme, de l'optique, de la physique quantique, de la théorie des champs, etc.

Puis nous avons été confronté au paradoxe de Schild. Et c'est encore Einstein qui, par son étude de l'effet photoélectrique, nous apprend que l'énergie d'un photon, la fréquence de l'onde associée, ainsi que sa longueur d'onde, sont étroitement liées. La recherche de la cohérence avec cet aspect ondulatoire de l'énergie est le troisième pilier de notre réflexion ; c'est celui qui nous a servi de guide pour analyser le paradoxe de Schild. La formule $E = h\nu$ est ici d'une importance capitale : elle établit un lien fondamental entre l'énergie, l'espace et le temps. Nous l'avons appliquée ici à la lumière (car l'expérience

de Pound et Rebka utilise un rayon lumineux), mais nous aurions pu l'appliquer à n'importe quel mobile : en effet, la mécanique ondulatoire a montré qu'elle se généralise de manière remarquable. Elle est devenue aussi l'une des bases de la mécanique quantique. Avec son étude de l'effet photoélectrique, Einstein a manifestement soulevé un "lièvre" d'importance majeure, et a obtenu un prix Nobel parfaitement justifié. D'ailleurs, il en aurait mérité un second pour la relativité restreinte, cela va de soi... mais il ne l'a pas eu !

Mais revenons à la mécanique de Newton : si ses formules sont cohérentes avec ce qui précède, elles seront le quatrième pilier de notre travail. Analysons ceci d'un peu plus près.

Ecrivons la formule : $E = m_0 c^2 \; ch\frac{w}{c} \; e^{-\frac{k}{r}}$ sous la forme suivante : $E_{dist} = m_0 c^2 \; ch\frac{w}{c} \; e^{-\frac{k}{r}} = m_0 c^2 \; ch\frac{w}{c} \; e^{\frac{\Phi}{c^2}}$, où Φ désigne la différence de potentiel, supposée constante, entre l'objet observé et l'observateur. Pour $\Phi = 0$, on obtient : $E_{loc} = m_0 c^2 \; ch\frac{w}{c}$. En mécanique newtonienne, on a : $dE_{loc} = \vec{F}.\vec{dl}_{loc}$ (où $\vec{F}$ désigne la force et $\vec{dl}$ un déplacement élémentaire évalué par un observateur local). Comme $dE_{dist} = dE_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ et $\vec{dl}_{dist} = \vec{dl}_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$, on déduit que $dE_{dist} = \vec{F}.\vec{dl}_{dist}$: la formule newtonienne est valable non seulement pour les observateurs locaux, mais aussi pour tous les autres observateurs, et l'évaluation de la force $\vec{F}$ est indépendante du potentiel dans lequel se trouve l'observateur, à condition que celui-ci soit immobile dans un potentiel constant.

Considérons maintenant l'impulsion : $p_{loc} = m_0 c \; sh\frac{w}{c}$. On sait que $\vec{dp}_{loc} = \vec{F}.dt_{loc}$, d'après la définition de la force. Comme $dt_{dist} = dt_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$, on doit donc avoir $\vec{dp}_{dist} = \vec{dp}_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$, donc $p_{dist} = p_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = m_0 c \; sh\frac{w}{c} \; e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$.

De même que l'espace et le temps, l'énergie et l'impulsion ne sont pas évaluées de la même façon par tous les observateurs :

$$\begin{cases} E = E_{dist} = E_{loc} \; e^{\frac{\Phi}{c^2}} = m_0 \; c^2 \; ch\frac{w}{c} \; e^{\frac{\Phi}{c^2}} \; ; \\ p = p_{dist} = p_{loc} \; e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = m_0 \; c \; sh\frac{w}{c} \; e^{-\frac{\Phi}{c^2}}. \end{cases}$$

Dans le cas de la lumière :

$$E = E_{dist} = h\nu_{dist} = h\nu_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} = E_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} \; ;$$

$$p = p_{dist} = \frac{h\nu_{dist}}{c_{dist}} = \frac{h\nu_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}}{c.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}} = \frac{h\nu_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}}{c} = p_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.$$

Il en résulte que les formules $E_{dist} = E_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ et $p_{dist} = \frac{h\nu_{dist}}{c_{dist}} = p_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ s'appliquent aussi bien aux rayonnements qu'aux corps massifs.

D'autre part, les deux formules :

$$\begin{cases} dE = \vec{F}.\vec{dl} \\ \vec{dp} = \vec{F}.dt \end{cases}$$

sont valables pour tous les observateurs, et l'évaluation de $\vec{F}$ est indépendante de Φ. Mais la formule $\vec{p} = m.\vec{v}$ n'est valable que localement.

Attention : nous avons dit, en commençant la démonstration de ces deux formules, que Φ devait être constant. Ceci suppose non seulement que l'observateur se trouve dans un potentiel constant (c'est évident), mais également le mobile observé. Ce qui entraîne que nos formules ne sont pas valables dans le cas d'une force gravitationnelle. En effet, si $\vec{F}$ est une force gravitationnelle, son travail $dE = \vec{F}.\vec{dl}$ est nécessairement associé à une variation de Φ, puisque, par définition, le potentiel gravitationnel équivaut au travail de la force gravitationnelle (au cœfficient m_0c^2 près). Donc, dans le cas d'une force gravitationnelle, on a :

$$\begin{cases} dE' = \vec{F}.\vec{dl} \ ; \\ dE = 0. \end{cases}$$

Rapelons que E' désigne l'énergie apparente, qui fait abstraction de l'énergie potentielle, tandis que E est l'énergie réelle, qui inclut l'énergie potentielle. Cette distinction, précisons-le, n'a aucun sens pour les phénomènes physiques locaux (par exemple des expériences effectuées par un physicien dans son laboratoire). Elle n'a de sens que pour des scènes observées de loin, à travers le filtre déformant d'une forte différence de potentiel gravitationnel.

Comme on le voit, il est permis de parler de force gravitationnelle, à condition de se rappeler qu'il s'agit d'une force très particulière. Quand une force usuelle s'exerce sur un mobile, elle modifie le mouvement de ce mobile par rapport à son entourage. S'il s'agit d'une force gravitationnelle, alors

l'entourage du mobile est affecté de la même manière que le mobile lui-même. Si cet entourage est le vide, peuplé d'une multitude de particules (ou ondes) virtuelles qui apparaissent ou disparaissent de manière aléatoire, alors toutes ces particules (ou ondes) subissent des modifications similaires : fréquence d'apparition, durée de vie, vitesse, longueur d'onde, période, énergie, impulsion, densité, toutes ces propriétés étroitement interconnectées sont affectées par la gravité.

On est en droit de se demander s'il ne serait pas plus rationnel de donner le nom d'"énergie réelle" à l'énergie E' (que j'appelle "apparente"), plutôt qu'à E ; les formules seraient alors identiques pour toutes les forces, gravitationnelles ou non. Ce point de vue est parfaitement légitime. Cependant, je ne l'ai pas suivi, car j'ai souhaité mettre en valeur l'invariant E (invariant aussi bien dans un contexte gravitationnel que non gravitationnel), qui sera largement utilisé par la suite. J'adopte donc une définition de l'énergie analogue à celle de Newton, incluant l'énergie potentielle. Si j'avais nommé E' "énergie réelle", j'aurais été obligé d'admettre que l'énergie du mobile ne se conserve pas quand il parcourt son orbite, bien qu'elle retrouve sa valeur initiale quand Φ retrouve la sienne. De même qu'en relativité restreinte l'énergie (ou la masse maupertuisienne) d'un mobile varie quand la vitesse relative de l'observateur change, mais retrouve sa valeur initiale quand la vitesse retrouve la sienne.

11 Métrique de l'espace-temps

Nous allons maintenant formaliser ce qui a été dit, dans une optique inspirée de celle d'Einstein, c'est-à-dire basée sur la métrique de l'espace-temps et les géodésiques. Le but est d'étudier comment les idées qui précèdent s'insèrent dans un tel cadre, où elles nous conduisent, et, éventuellement, comment elles devront être corrigées. Dans l'espace-temps euclidien de la relativité restreinte, on utilise la métrique minkowskienne : $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2$ (en ignorant la troisième dimension spatiale, selon notre choix exposé au début), ou, en coordonnées polaires : $ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2$. (Bien entendu, le corps massif que nous appelons "Soleil" occupe le centre du repère.)

L'intervalle d'univers infinitésimal ds est une notion locale ; il s'évalue à l'aide de dt_{loc}, dx_{loc} et dy_{loc} : $ds^2 = c^2dt_{loc}^2 - dx_{loc}^2 - dy_{loc}^2$.

Remplaçons dt_{loc} par $e^{-\frac{k}{r}}dt_{dist}$, dx_{loc} par $e^{\frac{k}{r}}dx_{dist}$ et dy_{loc} par $e^{\frac{k}{r}}dy_{dist}$; il

vient :

$$ds^2 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt_{dist}^2 - e^{\frac{2k}{r}} dx_{dist}^2 - e^{\frac{2k}{r}} dy_{dist}^2.$$

Puisque $\frac{\Phi}{c^2} = -\frac{G\ M}{r\ c^2} = -\frac{k}{r}$, on peut écrire :

$$ds^2 = c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ dt_{dist}^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ dx_{dist}^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ dy_{dist}^2.$$

Dans cette équation, $(cdt_{dist}, dx_{dist}, dy_{dist})$ sont évalués par un observateur distant (immobile et situé dans un potentiel nul), et Φ est le potentiel dans lequel est plongé l'objet observé (ou l'observateur local). Mais on pourrait décider de choisir un autre observateur (également immobile) situé dans un potentiel quelconque ; dans ce cas, Φ désignera la différence de potentiel entre l'objet observé et l'observateur.

Comme nous voulons étudier les équations du mouvement, nous ne pourrons pas nous référer à l'observateur local, qui sera nécessairement mobile ; nous allons donc prendre l'observateur distant (immobile) comme observateur de référence ; nous posons donc : $dt = dt_{dist}$, $dx = dx_{dist}$ et $dy = dy_{dist}$. Par conséquent :

$$ds^2 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dx^2 - e^{\frac{2k}{r}} dy^2.$$

En coordonnées polaires, on obtient :

$$ds^2 = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}\ dt^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ d\theta^2.$$

$$ds^2 = c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ dr^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ r^2\ d\theta^2.$$

Cette équation exprime la métrique de l'espace-temps au voisinage du corps massif ; elle peut être interprétée comme étant celle d'un espace-temps non euclidien. Nous nous engageons donc, en suivant l'exemple d'Einstein, dans la voie de l'espace-temps courbe, tout en gardant à l'esprit que cette courbure n'est peut-être qu'une illusion.

On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dt & dr & d\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c^2 \; e^{\frac{2\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} \; r^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \end{pmatrix} \; ;$$

ou, si on préfère :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dt & dr & d\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c^2 \; e^{-\frac{2k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2k}{r}} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\frac{2k}{r}} \; r^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \end{pmatrix} .$$

Supposons qu'on veuille modifier légèrement la métrique que nous avons trouvée, en jouant sur les exposants ; écrivons-la sous la forme générale :

$$ds^2 = c^2 e^{\frac{mk}{r}} dt^2 - e^{\frac{nk}{r}} dr^2 - e^{\frac{pk}{r}} r^2 d\theta^2$$

où m, n, p sont trois constantes. Alors, pour que la déflexion de la lumière soit conforme aux observations, on doit avoir : $n - m = 4$. (Ceci peut se prouver par un calcul analogue à celui de la section : "Déflexion de la lumière".) Pour obtenir la bonne précession du périhélie de Mercure, la condition est : $n + p - m = 6$. (On le montre en généralisant le calcul de la section : "Précession du périhélie".) Comme le critère de Schild impose clairement que $m = -2$, on a nécessairement : $n = p = 2$. Il est donc inutile d'essayer de modifier ces exposants.

Remarquons encore que la matrice que nous venons d'obtenir est diagonale parce-que nous nous sommes placés dans un cas particulier : le champ est produit par un seul corps ponctuel, et l'observateur distant est immobile par rapport à ce corps. Mais dans une situation différente, la matrice ne sera plus diagonale. Par exemple, si on change d'observateur, on doit combiner la transformation précédente avec une transformation de Lorentz ; la matrice ainsi obtenue n'est pas diagonale.

12 Quelques conséquences

Notons dl_{dist} une distance infinitésimale parcourue par le mobile étudié, évaluée par un observateur distant. On a : $dl_{dist}^2 = dx_{dist}^2 + dy_{dist}^2$ (ou $dl_{dist}^2 = dx_{dist}^2 + dy_{dist}^2 + dz_{dist}^2$, si on choisit de rétablir la troisième dimension

d'espace). La métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = c^2\ dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2 = c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ dt_{dist}^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ dl_{dist}^2\ ;$$

ce qui entraîne :

$$ds^2 = c^2\ dt_{loc}^2 \left(1 - \frac{dl_{loc}^2}{c^2\ dt_{loc}^2}\right) = c^2\ dt_{loc}^2 \left(1 - \frac{v_{loc}^2}{c^2}\right)\ ;$$

$$\frac{c^2\ dt_{loc}^2}{ds^2} = \frac{1}{1 - \frac{v_{loc}^2}{c^2}} = ch^2 \frac{w_{loc}}{c}.$$

Nous noterons simplement v et w la vitesse et la rapidité évaluées par l'observateur local.
On obtient :

$$\frac{c\ dt_{loc}}{ds} = ch \frac{w}{c}\ ;$$

$$\frac{c\ dt_{dist}}{ds} = \frac{c\ dt_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}}{ds} = ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}\ ;$$

$$ch\frac{w}{c} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.\frac{c\ dt_{dist}}{ds}.$$

$$\frac{dl_{loc}}{ds} = \frac{v}{c}.\frac{c\ dt_{loc}}{ds} = \frac{v}{c}.ch\frac{w}{c} = sh\frac{w}{c}\ ;$$

$$\frac{dl_{dist}}{ds} = \frac{dl_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}}{ds} = sh\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}\ ;$$

$$sh\frac{w}{c} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\frac{dl_{dist}}{ds}.$$

On peut donc compléter les formules obtenues précédemment (en notant : $dt = dt_{dist}$ et $dl = dl_{dist}$) :

$$\begin{cases} E = E_{dist} = m_0\ c^2\ ch\frac{w}{c}\ e^{\frac{\Phi}{c^2}} = m_0\ c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}.\frac{c\ dt}{ds}\ ; \\ p = p_{dist} = m_0\ c\ sh\frac{w}{c}\ e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = m_0\ c\ e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.\frac{dl}{ds}. \end{cases}$$

Une autre conséquence mérite d'être soulignée. Sachant que $m_0\ c^2\ ch\frac{w}{c} = E.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ et que $m_0\ c^2\ sh\frac{w}{c} = cp.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$, en utilisant le fait que $ch^2\frac{w}{c} - sh^2\frac{w}{c} = 1$, on tire facilement :

$$E^2.e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} - c^2p^2.e^{\frac{2\Phi}{c^2}} = m_0^2c^4.$$

Pour $\Phi = 0$, on retrouve la formule classique : $E^2 - c^2p^2 = m_0^2c^4$.

Par souci de simplification, nous utiliserons souvent, par la suite, l'énergie réduite $\overline{E}$ et l'impulsion réduite $\overline{p}$, définies par :

$$\begin{cases} \overline{E} = \frac{E_{dist}}{m_0c^2} = ch\frac{w}{c}\ e^{\frac{\Phi}{c^2}} = e^{\frac{2\Phi}{c^2}}.\frac{c\ dt}{ds}\ ; \\ \\ \overline{p} = \frac{p_{dist}}{m_0c} = sh\frac{w}{c}\ e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.\frac{dl}{ds}. \end{cases}$$

On a, bien sûr :

$$\overline{E}^2.e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} - c^2\overline{p}^2.e^{\frac{2\Phi}{c^2}} = 1.$$

Le moment cinétique d'un corps M par rapport à un point fixe O sera noté $\vec{\mu}$. Par définition : $\vec{\mu} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. On aura donc : $\vec{\mu} = m_0c\ e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.\vec{r} \wedge \frac{\vec{dl}}{ds}$. Dans notre étude du système solaire, on aura : $\frac{\Phi}{c^2} = -\frac{k}{r}$; de plus, la composante de $\vec{dl}$ qui intervient dans le produit vectoriel est la composante perpendiculaire au rayon vecteur $\vec{OM}$; elle est égale (en valeur scalaire) à $r\ d\theta$ (où $d\theta$ désigne la variation infinitésimale de l'angle au centre). On aura donc (en valeur scalaire) :

$$\mu = m_0c\ e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\frac{d\theta}{ds}.$$

Nous utiliserons aussi le moment cinétique réduit :

$$\overline{\mu} = \frac{\mu}{m_0c} = e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\frac{d\theta}{ds}.$$

Dans une étude telle que celle du système solaire, le moment cinétique des planètes sera conservé ; ceci provient du fait que la force $\vec{F}$ est dirigée vers le point fixe O, et se démontre exactement comme dans la théorie de

Newton (compte-tenu du fait que $d\vec{p} = \vec{F}.dt$).

D'autre part, nous admettrons la loi de la conservation de l'énergie : $ch\frac{w}{c}\ e^{\frac{\Phi}{c^2}} = constante$, ou $e^{\frac{2\Phi}{c^2}}.\frac{c\ dt}{ds} = constante$. Attention : ces formules seront valables à condition que l'observateur (distant ou non) soit immobile dans un potentiel constant.

13 Les théories de Nordström, d'Einstein et de Ni

Au point où nous sommes arrivés, arrêtons-nous un instant pour comparer l'équation que nous venons d'obtenir avec celles qui ont été publiées dans le cadre des différentes théories de la gravitation.

Dans le cas de la relativité générale d'Einstein, la métrique de l'espace-temps au voisinage d'un corps massif ponctuel est donnée par la solution de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2k}{r}\right) c^2\ dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2k}{r}}\ dr^2 - r^2\ d\theta^2, \text{ ou encore :}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2\ dt^2 - \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}\ dr^2 - r^2\ d\theta^2.$$

Quant au physicien chinois Ni, dans sa seconde théorie de 1972 (à ne pas confondre avec ses autres théories, dont certaines présentent de réels défauts !), il obtient :

$$ds^2 = c^2\ e^{2f\left(\frac{\Phi}{c^2}\right)}\ dt^2 - e^{-2f\left(\frac{\Phi}{c^2}\right)}\ dr^2 - e^{-2f\left(\frac{\Phi}{c^2}\right)}\ r^2\ d\theta^2$$

où f désigne une fonction arbitraire. Notre équation correspond donc au cas particulier le plus simple de la théorie de Ni : le cas où $f(x) = x$. On pourrait l'appeler : métrique triviale de Ni.

Remarquons que le coefficient $e^{-\frac{2k}{r}} = e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$ est présent dans plusieurs autres théories de la gravitation, en particulier dans la première théorie de Nordstöm (1912). Cette théorie a été prise en défaut, et Nordström a publié en 1913 une seconde théorie, qui est restée célèbre, d'une part parce-qu'elle est considérée comme la première théorie relativiste de la gravitation vraiment solide, d'autre part parce-qu'elle a ouvert la voie à la relativité générale :

Einstein l'a beaucoup admirée, et s'en est fortement inspiré.

Les partisans de la théorie d'Einstein estiment que toutes les (nombreuses) autres théories de la gravitation doivent être éliminées, pour des raisons variées. Entre autres choses, ils reprochent à la plupart de ces théories de ne pas respecter le principe d'équivalence fort. Or, d'après la conjecture de Schiff, une théorie de la gravitation qui respecte le principe d'équivalence faible doit aussi respecter le principe d'équivalence fort. Mais ceci n'est rien d'autre qu'une conjecture... Je reviendrai plus loin sur ces principes d'équivalence.

Le but n'est pas ici d'opposer ces différentes théories : rien ne permet de dire que l'une d'elles soit totalement et définitivement juste ! Si j'ai choisi d'étudier la métrique triviale de Ni et ses implications, c'est parce-qu'un raisonnement élémentaire nous conduit directement vers elle. Mon intention n'est pas de défendre la théorie de Ni contre celle d'Einstein : la seule chose qui m'intéresse dans la théorie de Ni, c'est sa métrique, qui contient, selon moi, au moins un embryon de vérité ; et nous allons voir jusqu'où elle nous mène, et quelles questions elle soulève.

Mais, tout d'abord, rappelons que les théories de la gravitation relativiste peuvent être étudiées et classées selon les méthodes du "formalisme post-newtonien paramétrisé", qui attribue à chaque théorie des coefficients α, β, γ, etc.

La métrique que nous avons obtenue peut s'écrire :
$ds^2 = c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ dr^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ r^2\ d\theta^2$ (avec $\Phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{kc^2}{r}$), ou encore, en remplaçant c par 1 (selon l'usage des physiciens relativistes) :
$ds^2 = e^{2\Phi}\ dt^2 - e^{-2\Phi}\ dr^2 - e^{-2\Phi}\ r^2\ d\theta^2$.
En développant en série les coefficients de la métrique, on obtient :
$e^{2\Phi} = 1 + 2\Phi + 2\Phi^2 + ...$ et $-e^{-2\Phi} = -1 + 2\Phi - 2\Phi^2 + ...$
Ceci permet de calculer facilement les trois premiers coefficients post-newtoniens α, β, γ, car, d'après le formalisme post-newtonien paramétrisé, le premier développement en série est égal à $1+2\alpha\Phi+2\beta\Phi^2+...$, et le second à $-1+2\gamma\Phi+....$
La comparaison montre que notre métrique correspond à $\alpha = \beta = \gamma = 1$, ce qui est une condition nécessaire (mais peut-être pas suffisante) pour qu'une théorie de la gravitation soit viable, compte-tenu de l'ensemble des mesures effectuées à ce jour dans le système solaire. Dans la suite de ce travail, le but premier sera de montrer que notre métrique permet de retrouver les résultats essentiels de la gravitation newtonienne et de la relativité générale ; mais nous savons d'avance qu'elle va passer avec succès les principaux tests

classiques.

14 Principes d'équivalence

Einstein a cherché à baser la relativité générale sur des principes.

Le premier, qu'on appelle aujourd'hui "principe d'équivalence faible", dit que la masse gravifique et la masse inerte sont équivalentes. Il a pour conséquence que, dans un champ gravitationnel donné, tous les corps subissent la même accélération. Ce principe a toujours été confirmé, en particulier par les expériences extrêmement précises d'Eötvös, de sorte qu'il ne semble pas très raisonnable, dans l'état actuel de nos connaissances, de le mettre en doute. Nous avons implicitement admis ce principe, puisque nous avons fait intervenir dans les deux formules $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$ (loi fondamentale de la mécanique newtonienne, relecture relativiste) et $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u}$ (loi de la gravitation universelle) la même expression de la masse m ; c'est ce qui nous a permis d'éliminer la masse, et d'obtenir la formule : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$.

De plus, cette masse m correspond à la masse maupertuisienne : $m = \frac{E}{c^2}$; comme E est l'énergie totale du corps en mouvement, on peut dire que nous avons attribué le même rôle gravitationnel à toutes les formes d'énergie. La force attractive entre deux corps est proportionnelle à l'énergie de chacun d'eux, et non à leurs masses au repos. D'ailleurs la "masse au repos" d'un corps composé (étoile, planète, atome ...) inclut déjà diverses formes d'énergie (cinétique, électromagnétique, etc ...) et ne peut pas être interprétée comme une caractéristique absolue de ce corps (comme la charge électrique par exemple) : les masses qui interviennent en mécanique classique sont, en réalité, toujours maupertuisiennes ! C'est la relativité restreinte qui nous enseigne que la masse absolue est un mythe : seules existent les masses maupertuisiennes (relatives), c'est-à-dire l'énergie.

Nous avons donc admis implicitement l'équivalence de toutes les formes d'énergie dans l'attraction gravitationnelle : c'est ce qu'on appelle parfois le "principe d'équivalence d'Einstein", qui est respecté par la relativité générale et par la plupart des théories relativistes de la gravitation. Mais ce principe ne doit pas être considéré comme un dogme, et doit pouvoir être remis en question si les faits l'exigent...

Le troisième principe d'équivalence est bien différent des deux premiers :

c'est le "principe d'équivalence fort". Il est inspiré par la recherche d'une généralisation du "principe de relativité" aux référentiels accélérés. Il dit que l'effet d'un champ gravitationnel est équivalent à celui d'une accélération, ou encore, si on préfère, que l'effet de la gravitation peut être (localement) "effacé" si on choisit un repère convenablement accéléré. Autrement dit, si un laboratoire fermé se trouve dans un ascenseur en mouvement ou sur une plate-forme en rotation (pour reprendre les célèbres expériences de pensée d'Einstein), ou encore dans une fusée, aucune expérience embarquée ne permettra de prouver que les forces subies ne sont pas gravitationnelles.

Le mot "localement" est important ; en effet, contrairement aux mouvements de translation uniforme, le mouvement tournant de la plate-forme d'Einstein (ou de la Terre) peut être mis en évidence par des expériences embarquées. Donnons-en quelques exemples.

Si, installé dans votre fauteuil, vous regardez le bulletin météorologique à la télévision, vous pouvez vérifier que tous les anticyclones (dans un même hémisphère) tournent dans le même sens, et les dépressions dans le sens inverse. Ce phénomène, lié à la force de Coriolis, prouve que la rotation de la Terre a une réalité objective.

La célèbre expérience du pendule de Foucault en est une autre preuve.

Si la rotation de la Terre était subjective, on serait libre de la supposer immobile ; dans ce cas, c'est l'univers entier qui tournerait autour d'elle en 24 heures. Une étoile "proche" (comme Proxima du Centaure) se déplacerait alors à une vitesse de l'ordre de 10000 fois celle de la lumière, ce qui est, bien sûr, interdit par la relativité restreinte !

Mentionnons aussi l'effet Sagnac : imaginons un système de miroirs permettant de guider des rayons lumineux sur le pourtour d'une plate-forme tournante ; d'après la relativité restreinte, deux rayons se déplaçant en sens inverse ne mettront pas le même temps pour faire un tour complet. Le décalage est parfaitement mesurable. Ce phénomène est exploité dans les gyroscopes à effet Sagnac.

Un autre effet (dont nous reparlerons dans la section sur la précession géodétique) est la précession de Thomas : un corps quelconque (planète, sonde spatiale équipée de gyroscopes...) soumis à une accélération subit une précession, c'est-à-dire que la direction de son axe de rotation évolue dans le temps. La mesure de cette précession permet, en principe, de calculer l'accélération

de ce corps, de manière absolue (c'est-à-dire sans avoir à choisir arbitrairement un repère de référence). Cet effet est une conséquence de la relativité restreinte. Imaginons par exemple qu'un premier astronome prétende que le Soleil tourne autour de la Terre, un second que la Terre tourne autour du Soleil, un troisième que les deux astres tournent autour de leur centre de gravité commun ; en principe, une étude fine des précessions de la Terre et du Soleil devrait permettre de départager ces points de vue (en principe seulement, car dans cet exemple la précession de Thomas est extrêmement faible, donc très difficile à mesurer).

Evoquons encore un exemple très connu : le paradoxe des jumeaux de Langevin. Si l'un des jumeaux (A) quitte la Terre pour faire un voyage spatial à grande vitesse, puis revient sur Terre après de nombreuses années, il constatera, à son retour, que son frère (B) a vieilli plus vite que lui. Ceci vient du fait que les horloges en mouvement tournent moins vite que les horloges immobiles (effet de la relativité restreinte). Mais, inversement, ne pourrait-on dire que c'est la Terre qui s'est déplacée à grande vitesse par rapport à l'engin spatial ? Dans ce cas, la conclusion devrait être inverse : c'est le jumeau A qui a vieilli plus vite que B. Ces deux conclusions étant contradictoires, l'une des deux est nécessairement fausse : c'est, bien sûr, la seconde, car c'est l'engin spatial, et non la Terre, qui a subi des accélérations et décélérations (au décollage et à l'atterrissage).

Il est clair qu'une accélération peut être mise en évidence, de manière objective, par des expériences embarquées : il y a donc une différence fondamentale entre les repères galiléens (en mouvement de translation uniforme) et les repères accélérés. La relativité restreinte se base sur l'équivalence des repères galiléens ; une relativité généralisée aux repères accélérés est un mythe.

Malgré cela, on peut encore se demander si un physicien, enfermé dans un laboratoire "infiniment petit", dans l'ascenseur d'Einstein ou sur la plateforme tournante, sera encore en mesure de mettre en évidence la rotation : ne pourrait-il pas confondre la force centrifuge avec un champ de gravitation ? C'est ce que dit le principe d'équivalence fort. Une théorie scientifique ne peut pas s'appuyer sur un principe aussi fragile, et le plus sage est de l'ignorer purement et simplement.

15 Le pari d'Einstein

Supposons que notre but soit de nous rapprocher de la relativité générale : il faudrait alors modifier notre métrique (ou plutôt celle de Ni...) en faisant intervenir ce principe d'équivalence fort. Voici comment.

Prenons comme base de départ la métrique triviale de Ni au voisinage d'un corps massif, en coordonnées polaires :

$$ds^2 = c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ dr^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ r^2\ d\theta^2.$$

Considérons d'abord un observateur tombant vers le Soleil en ligne droite (sa vitesse étant supposée nulle à l'infini). Rappelons-nous l'expérience de pensée d'Einstein : un physicien enfermé dans un ascenseur en chute libre se croit immobile. S'il croise sur son chemin des "observateurs locaux" (immobiles par rapport au Soleil), il sera en désaccord avec eux sur les mesures de distances dans la direction radiale (d'après la relativité restreinte), mais il y aura accord sur les distances élémentaires perpendiculaires au vecteur vitesse. La chute libre de l'observateur modifie son évaluation des distances selon la direction radiale seulement ; donc, selon le principe d'équivalence fort, la présence d'une masse ponctuelle au centre d'un cercle modifie le rayon de ce cercle, mais pas son périmètre. Cette remarque va nous amener à supprimer le coefficient $e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ devant $r^2\ d\theta^2$ dans le dernier terme de notre métrique, qui devient donc :

$$ds^2 = c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ dr^2 - r^2\ d\theta^2.$$

Considérons maintenant la seconde expérience de pensée d'Einstein : le physicien se trouve maintenant sur la plate-forme tournante, à la distance r du centre O ; il estime que la force centrifuge qu'il subit est une force gravitationnelle. La vitesse est : $v = r\omega$ (où ω désigne la vitesse angulaire) ; si on désigne par Φ la différence de potentiel entre P et O, c'est-à-dire le travail de la force centrifuge entre P et O, on a : $\Phi = -\frac{r^2\omega^2}{2}$; le coefficient de dilatation du temps, calculé selon la relativité restreinte, est donc : $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}} = \sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$. Ce physicien va estimer que cette distorsion du temps est due au champ gravitationnel Φ ; il va donc nous suggérer de modifier notre modèle, en remplaçant $e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ par $\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$ dans notre métrique ;

le coefficient $e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$ devient $1+\frac{2\Phi}{c^2}$, et $e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}$ devient $\frac{1}{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$.

Après avoir fait ces deux petites manipulations, nous obtenons la métrique suivante :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 \; dt^2 - \frac{1}{1+\frac{2\Phi}{c^2}} \; dr^2 - r^2 \; d\theta^2$$

ou, si on préfère :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \; dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2GM}{rc^2}} \; dr^2 - r^2 \; d\theta^2.$$

C'est exactement la métrique de Schwarzschild au voisinage d'un corps massif.

On pourrait se demander s'il n'existe pas un changement de variables simple permettant de passer de la métrique de Schwarzschild à celle de Ni ; dans ce cas, on pourrait considérer qu'il s'agit de deux expressions d'une même métrique. Mais non : c'est impossible, pour deux raisons au moins.

Première raison : dans la métrique de Schwarzschild, le coefficient $\frac{1}{1-\frac{2GM}{rc^2}}$ (qui multiplie dr^2, dans le second membre de la métrique) tend vers l'infini quand r tend vers $\frac{2GM}{c^2}$, ce qui fait apparaître une singularité associée à la sphère de Schwarzschild ; cette singularité n'existe pas dans la métrique de Ni, puisque le coefficient correspondant, $e^{-\frac{2GM}{rc^2}}$, ne diverge pas.

Seconde raison : appelons r_1 la distance radiale qui intervient dans la métrique de Schwarzschild, et r_2 celle qui intervient dans la métrique de Ni ; en identifiant les derniers termes des deux métriques, nous obtenons :
$r_1^2 \; d\theta^2 = e^{\frac{2k}{r_2}} \; r_2^2 \; d\theta^2$, donc : $r_1 = e^{\frac{k}{r_2}} \; r_2$.
Si nous faisons tendre r_2 vers l'infini, r_1 tend aussi vers l'infini : jusqu'ici, rien de plus normal. Mais si, maintenant, nous faisons tendre r_2 vers 0, alors r_1 ne tend pas vers 0, mais, une fois encore, vers l'infini ! Ceci entraîne qu'il est impossible d'établir une correspondance bijective entre r_1 et r_2. Les deux métriques sont fondamentalement incompatibles, du moins pour les valeurs de r proches de $\frac{2GM}{c^2}$, ou inférieures.

Quelle métrique allons-nous choisir ?

Comme nous avons calculé ce coefficient $e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ en utilisant uniquement la loi de la gravitation universelle de Newton, il apparaît de manière évidente qu'il y a conflit entre cette loi et le principe d'équivalence fort. La loi de Newton n'ayant jamais (ou pas encore ?) été mise en échec, nous n'avons pas de raison de l'abandonner ici. De plus, comme nous venons de le voir, la métrique de Schwarzschild fait apparaître des singularités : c'est l'un des reproches majeurs qui sont faits à la relativité générale. Evitons donc de nous précipiter dans cette direction, tant que nous n'aurons pas de vraies raisons de le faire !

Faut-il douter du principe d'équivalence fort, qu'Einstein lui-même a qualifié d'"idée la plus heureuse de son existence" ? Plus exactement, il faut attendre, pour l'adopter, d'y être contraint par la nécessité. En attendant, il est clair qu'une étude de la gravitation doit s'appuyer en priorité sur la loi de Newton. Le jour où cette loi sera prise en défaut, le moment sera venu d'en chercher la raison, afin de la corriger. Jusqu'à preuve du contraire, le seul défaut connu de la loi de Newton est de ne pas être compatible avec la relativité restreinte ; mais, comme nous venons de le voir, ce défaut peut être corrigé très simplement.

Le choix d'Einstein, qui consiste à privilégier le principe d'équivalence fort par rapport à la loi de Newton, sur la seule base d'expériences de pensée, constitue ce que j'appelle "le pari d'Einstein".

Les raisons de ce pari sont faciles à comprendre : à l'époque d'Einstein (et probablement encore aujourd'hui), les données observationnelles étaient insuffisantes pour conduire de manière directe à une théorie unique et certaine ; un acte de foi était nécessaire pour pallier ce manque. Le choix du principe d'équivalence fort était précisément l'acte de foi qui devait permettre à Einstein de résoudre de manière totale le problème de la gravité grâce à la virtuosité mathématique, en marginalisant le recours à l'observation et à l'expérimentation. En pariant sur le principe d'équivalence fort, Einstein était parfaitement conscient qu'il tenait l'élément clé qui allait lui permettre de mettre en place sa stratégie de géométrisation de la gravité ; il entrevoyait sans doute déjà les outils mathématiques qu'il allait pouvoir utiliser, à commencer par les géodésiques.

Mais notre but est beaucoup plus limité : nous nous contenterons d'une modeste approche, un simple débroussaillage. Pour atteindre ce but, nous devons nous appuyer sur des hypothèses minimales (selon le principe du rasoir d'Occam) : nous n'utiliserons pas le principe d'équivalence fort, parce-que

nous n'avons pas besoin de cette hypothèse ; nous ne ferons aucun acte de foi, et nous continuerons à travailler avec la métrique triviale de Ni, afin d'étudier jusqu'où elle peut nous conduire.

16 Principes de Mach

Avant de reprendre nos calculs, disons quelques mots sur les principes de Mach. Einstein était très intéressé par les idées de ce physicien et philosophe du XIXeme siècle, et avait eu l'intention, dans un premier temps, de s'inspirer de ses principes pour construire la relativité générale. Il a ensuite changé d'avis, et a préféré privilégier les principes d'équivalence. L'œuvre de Mach ne se résume pas en quelques mots : chacun en retire ce qui lui convient. Dans leur étude, Hermann Bondi et Joseph Samuel (voir liens) identifient onze idées principales, qu'ils numérotent de Mach0 à Mach10.

- Mach0 : ce n'est pas un principe, mais un fait d'observation. Plaçons-nous sur la plate-forme tournante d'Einstein (supposée circulaire, de rayon r, tournant à la vitesse angulaire ω). Nous utilisons une fibre optique pour guider des faisceaux lumineux sur le pourtour de celle-ci. Deux faisceaux sont émis à partir d'un même point A (lié à la plate-forme, donc tournant à la vitesse $v = r\omega$) ; l'un d'eux circule dans la fibre dans le sens de la rotation de la plate-forme (sens direct), l'autre dans le sens inverse (sens rétrograde). Calculons le temps mis par chacun d'eux pour revenir au point A :
- pour le faisceau de sens rétrograde, l'angle à parcourir est $2\pi\frac{c}{c+v}$, la distance à parcourir est $2\pi r\frac{c}{c+v}$, le temps nécessaire est $2\pi r\frac{1}{c+v}$;
- pour le faisceau de sens direct, l'angle à parcourir est $2\pi\frac{c}{c-v}$, la distance à parcourir est $2\pi r\frac{c}{c-v}$, le temps nécessaire est $2\pi r\frac{1}{c-v}$;
- la différence entre les instants d'arrivée est donc :
$\Delta t = 2\pi r\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) = 2\pi r\frac{(c+v)-(c-v)}{(c+v).(c-v)} = \frac{4\pi rv}{c^2-v^2} = \frac{4\pi r.(r\omega)}{c^2-v^2} \approx \frac{4\pi r^2\omega}{c^2}$ (pour $v << c$).
En pratique, on utilise des faisceaux laser monochromatiques ; l'écart à l'arrivée est évalué par interférence. On considère que la vitesse de rotation est nulle quand les franges d'interférence disparaissent. C'est le principe des gyroscopes à effet Sagnac, utilisés pour évaluer la stabilité ("non-rotation") des engins spatiaux. Et c'est ici qu'intervient le fait d'observation, qu'on peut considérer soit comme une évidence, soit comme une incroyable coïncidence : dans un repère inertiel non tournant (selon la définition précédente), les astres lointains (les galaxies par exemple) semblent globalement fixes. Pourquoi ? Est-ce parce-que, pour une raison inconnue, l'univers dans son ensemble ne

tourne pas ? Pour Mach, cette explication n'en est pas une : le mouvement de rotation d'un corps ne peut être évalué que relativement à d'autres corps ; la rotation de l'univers ne peut être évaluée que par rapport à lui-même, donc elle n'a pas de signification. C'est pourquoi il propose d'autres pistes (voir Mach3).

- Mach1 : la "constante de la gravitation" G n'est pas constante. Ce principe n'est pas respecté par la relativité générale, mais il est respecté par la théorie de Brans-Dike. Ces auteurs estiment qu'il faut choisir entre les principes Mach1 et Mach6 (soit G est variable, soit les masses inertes sont variables), mais qu'une théorie cohérente avec les idées de Mach n'a pas à respecter les deux principes. Si G varie en fonction de la densité de l'univers, alors, en raison de l'expansion de celui-ci, G doit varier avec le temps cosmologique ; les observations astronomiques, jusqu'à présent, ne semblent pas confirmer la variation de G ;

- Mach2 : un corps isolé dans un univers vide n'a pas d'inertie. Ce principe est à rapprocher du suivant ;

- Mach3 : c'est la distribution de la matière dans l'univers qui "décide" de l'inertie, en attribuant à tel ou tel repère le statut de repère inertiel ou non inertiel, de repère tournant ou non tournant. Ce principe a été partiellement intégré par Einstein, puisqu'en relativité générale, c'est la matière qui régit la métrique de l'espace-temps, donc qui attribue à telle ou telle trajectoire le statut de géodésique ou de non-géodésique ; cette façon de voir a reçu un début de confirmation, grâce à l'effet Lense-Thirring, dont nous reparlerons ; voir également la section sur la matière noire ; ce principe a une place centrale dans la pensée de Mach ;

- Mach4 : l'univers est spatialement clos. On ne sait pas si ce principe est juste ;

- Mach5 : l'univers n'a ni vitesse propre, ni moment angulaire propre ; ce principe est à rapprocher de Mach2 et Mach3 ;

- Mach6 : la masse inerte des corps dépend de la distribution de la matière dans l'univers ; ce principe est respecté par plusieurs théories (Nordström, Jordan...) mais pas par la relativité générale ; comme nous l'avons vu, les bases de travail que nous avons choisies impliquent que l'énergie d'un corps, et par conséquent sa masse maupertuisienne, dépendent du potentiel gravitationnel ; entre Mach1 et Mach6, nous serons donc conduits à choisir Mach6 ;

- Mach7 : sans matière, il n'y a pas d'espace ; curieusement, ce principe ne va pas de soi en gravitation newtonienne, ni en relativité générale ;

- Mach8 : la quantité $\Omega = 4\pi\rho GT^2$ (où ρ est la densité de matière dans l'univers et T le temps de Hubble) est de l'ordre de l'unité. Je ne prendrai pas en compte ce principe, qui concerne plus la cosmologie que la gravitation ;

- Mach9 : une théorie de la gravitation ne doit contenir aucun élément absolu ; cet objectif semble difficile à atteindre !

- Mach10 : les mouvements de translation et de rotation sont inobservables (autrement dit ils sont relatifs à l'observateur, et n'ont aucune signification physique absolue) ; en relativité restreinte, la translation est effectivement relative, mais pas la rotation. On peut penser qu'en élaborant la relativité générale, Einstein a essayé de rendre également les rotations relatives (son expérience de pensée sur la plate-forme tournante en est un indice), mais il a dû renoncer ; il n'a pas poussé plus loin son utilisation des principes de Mach, et s'est tourné vers les principes d'équivalence : la relativité générale ne respecte pas le principe Mach10.

On peut rappeler ici une expérience célèbre (d'abord expérience de pensée, mise ensuite en pratique) : l'expérience du seau de Newton. Il s'agit d'un seau contenant de l'eau, qu'on fait tourner autour de son axe vertical (par exemple en le fixant au centre d'une plate-forme tournant dans un plan horizontal). En raison de la viscosité de l'eau et des frottements contre les parois, le liquide se met progressivement à tourner aussi. Lorsque l'eau tourne à la même vitesse que le seau, sa surface prend la forme d'un paraboloïde. Le calcul est simple. Supposons qu'à une distance r du centre du seau, la hauteur de l'eau soit z. Une goutte d'eau de masse m, située en surface, va subir une force verticale due à la pesanteur, de module gm (où g est l'accélération de la pesanteur) et une force centrifuge horizontale, de module $mr\omega^2$. L'équilibre est atteint lorsque la force résultante est perpendiculaire à la surface du liquide, ce qui s'écrit : $\frac{mr\omega^2}{gm} = \frac{dz}{dr}$, soit $dz = \frac{\omega^2}{g} rdr = \frac{\omega^2}{g} d\left(\frac{r^2}{2}\right)$, d'où on tire : $z = \frac{r^2\omega^2}{2g}$ (à une constante près), ce qui est bien l'équation d'un paraboloïde. Pour Newton, cette expérience était la preuve de l'existence objective et absolue (et non relative) de la rotation. Pour Mach, le point de vue qui consiste à supposer le seau immobile, et le reste de l'univers tournant autour de lui, doit être considéré comme tout aussi légitime. Par conséquent, il doit être possible de considérer que la déformation de la surface de l'eau est due

au mouvement tournant de l'univers autour d'elle. Peut-on considérer que ce sont les étoiles, la Voie Lactée, les galaxies lointaines, tournant à une vitesse vertigineuse autour du seau, qui exercent sur l'eau une attraction accrue qui la déforme ? Cette interprétation du principe Mach10 serait une mauvaise plaisanterie ! Mais rien n'interdit de penser que la rotation de l'ensemble de l'univers entraîne une rotation simultanée des repères inertiels, d'après le principe Mach3 ; et la force centrifuge qui modifie la surface de l'eau traduit la rotation relative du repère inertiel local par rapport au seau, ou du seau par rapport au repère inertiel local. Ainsi interprété, le principe Mach10 rejoint presque le point de vue de Newton... Mais il ne peut être question d'interpréter la force centrifuge comme une manifestation de la gravitation.

Bien entendu, nous ne nous baserons jamais sur les principes de Mach pour orienter nos calculs, mais nous chercherons à savoir s'il y a, ou non, compatibilité, totale ou partielle.

17 Version polaire des géodésiques

Nous voudrions maintenant tester la cohérence de nos équations avec la notion de géodésique, qui est à la base de la relativité générale.

Le calcul des géodésiques revient à rechercher les trajectoires qui maximisent le temps propre $\int ds$.

Il existe deux méthodes principales pour calculer ces géodésiques : la première (la plus ancienne) est la méthode des variations ; elle s'inspire directement du calcul infinitésimal de Newton et Leibniz, qu'elle utilise d'une manière très astucieuse ; elle a été mise au point par Lagrange et Euler. La seconde fait appel à des notions plus abstraites (mais très rigoureuses) du calcul tensoriel, et plus précisément aux symboles de Christoffel.

Les équations ainsi obtenues peuvent s'écrire (en notation tensorielle) de la manière suivante :

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\,\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Dans cette égalité, les indices i, j, k, qu'ils soient en position basse ou

haute, peuvent être égaux à 1, 2 ou 3 (k ayant la même valeur dans les deux membres) ; donc, à elle seule, l'égalité résume neuf équations, qui expriment les contraintes imposées aux géodésiques.

La variable x^1 désigne le temps t, x^2 désigne la distance radiale r, et x^3 désigne l'angle θ ; les coefficients g_{ij} sont les coefficients de la matrice de la métrique.

Comme nous allons étudier le système solaire, nous exprimons la métrique en coordonnées polaires ; la distance d'une planète par rapport au Soleil est désignée par r. Sous forme matricielle, la métrique s'écrit :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2\ e^{-\frac{2k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2k}{r}} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\frac{2k}{r}}\ r^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc : $g_{11} = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}$, $g_{22} = -e^{\frac{2k}{r}}$, $g_{33} = -e^{\frac{2k}{r}}\ r^2$; d'autre part, pour $i \neq j$: $g_{ij} = 0$ (car notre matrice est diagonale).
Ceci permet de simplifier les équations des géodésiques, qui deviennent :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d}{ds}\left(g_{11}\ \frac{dt}{ds}\right) = \frac{1}{2}\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{11}}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \left(\frac{dr}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{22}}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{33}}{\partial t}\ ; \\ 2)\ \frac{d}{ds}\left(g_{22}\ \frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} + \frac{1}{2}\ \left(\frac{dr}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} + \frac{1}{2}\ \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{33}}{\partial r}\ ; \\ 3)\ \frac{d}{ds}\left(g_{33}\ \frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{1}{2}\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\ \left(\frac{dr}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\ \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Nous savons que :
$g_{11} = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}$, donc : $\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{2kc^2}{r^2}\ e^{-\frac{2k}{r}}$, $\frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} = 0$;
$g_{22} = -e^{\frac{2k}{r}}$, donc : $\frac{\partial g_{22}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{2k}{r^2}\ e^{\frac{2k}{r}}$, $\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} = 0$;
$g_{33} = -e^{\frac{2k}{r}}\ r^2$, donc : $\frac{\partial g_{33}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial g_{33}}{\partial r} = 2(k - r)\ e^{\frac{2k}{r}}$, $\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = 0$.

Faisons les substitutions dans les équations des géodésiques ; il vient :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d}{ds}\left(c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{dt}{ds}\right) = 0\ ; \\ \\ 2)\ \frac{d}{ds}\left(-e^{\frac{2k}{r}}\ \frac{dr}{ds}\right) = \frac{kc^2}{r^2}\ e^{-\frac{2k}{r}}\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{k}{r^2}\ e^{\frac{2k}{r}}\ \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + (k-r)\ e^{\frac{2k}{r}}\ \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\ ; \\ \\ 3)\ \frac{d}{ds}\left(-e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ \frac{d\theta}{ds}\right) = 0. \end{cases}$$

La première égalité signifie que la quantité $e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{dt}{ds}$ est constante sur la géodésique. Nous l'avons déjà rencontrée précédemment ; elle exprime la conservation de l'énergie.

La troisième signifie que la quantité $e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ \frac{d\theta}{ds}$ est, elle aussi, constante. Nous l'avons déjà rencontrée, elle aussi. Elle exprime la conservation du moment cinétique.

La seconde est un peu plus complexe : je choisirai de ne pas l'utiliser, et de baser tous mes calculs, intégralement, sur les trois équations que je considère comme fondamentales : la métrique de l'espace-temps, la conservation de l'énergie et la conservation du moment cinétique. Nous pouvons cependant l'analyser brièvement ; elle peut s'écrire :

$$\frac{d}{ds}\left(-e^{\frac{2k}{r}}\frac{dr}{ds}\right) = \frac{kc^2}{r^2}e^{-\frac{2k}{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{k}{r^2}\ e^{\frac{2k}{r}}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + (k-r)e^{\frac{2k}{r}}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\ ;$$

$$-e^{\frac{2k}{r}}\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{2k}{r^2}e^{\frac{2k}{r}}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{kc^2}{r^2}e^{-\frac{2k}{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{k}{r^2}e^{\frac{2k}{r}}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+(k-r)e^{\frac{2k}{r}}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\ ;$$

$$e^{\frac{2k}{r}}\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{kc^2}{r^2}e^{-\frac{2k}{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{k}{r^2}e^{\frac{2k}{r}}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + (r-k)e^{\frac{2k}{r}}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\ ;$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{kc^2}{r^2}e^{-\frac{4k}{r}} + \frac{k}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r-k)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Sur une orbite circulaire (r=constante), on aura : $\frac{dr}{dt} = 0$, donc, pour $k << r$:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{kc^2}{r^2}e^{-\frac{4k}{r}} + (r-k)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \approx -\frac{GM}{r^2} + (r-k)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Ceci signifie que le mobile (la planète) subit une accélération centrale (dirigée vers le Soleil) égale à $\frac{GM}{r^2}$ (c'est l'accélération gravitationnelle newtonienne)

diminuée de la quantité $(r-k)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ (qui correspond à peu près à l'accélération centrifuge de Newton, à un détail près : r est remplacé par $r-k$).

Voici donc les trois équations que nous avons choisi de privilégier :

$$\begin{cases} 1)\ ds^2 = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}\ dt^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ d\theta^2 \text{ (équation de la métrique) ;} \\ 2)\ \overline{E} = \frac{E}{m_0 c^2} = e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{cdt}{ds} = \text{ constante (conservation de l'énergie) ;} \\ 3)\ \overline{\mu} = \frac{\mu}{m_0 c} = e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ \frac{d\theta}{ds} = \text{ constante (conservation du moment cinétique).} \end{cases}$$

Nous avions déjà établi ces trois formules avant de parler de géodésiques ; le fait qu'un raisonnement basé uniquement sur les géodésiques nous conduise précisément aux mêmes lois de conservation (conservation de l'énergie et conservation du moment cinétique) nous conforte dans l'idée que ces lois sont bien les clés de l'étude du système solaire : la cohérence de ces équations avec la notion de géodésique est parfaite jusqu'ici. Elles serviront de base à la suite de notre travail.

18 Version cartésienne des géodésiques

Nous sommes tentés de croire que la conservation de l'énergie est une loi fondamentale : toutes les branches de la physique, y compris la mécanique quantique, nous le confirment. La conservation du moment cinétique, au contraire, n'est valable que dans le cas particulier d'une force centrale (force dirigée vers un point fixe), comme c'est le cas (avec une bonne approximation) dans le système solaire. La démonstration classique ne présente pas de difficulté. Dans le but de trouver des lois plus générales, nous allons reprendre l'étude des géodésiques, mais, cette fois-ci, en coordonnées cartésiennes et non polaires, afin de nous dégager de la situation de symétrie sphérique.

Sous forme cartésienne, la métrique peut s'écrire (en utilisant les coordonnées établies par l'observateur distant) :

$$ds^2 = e^{\frac{2\Phi}{c^2}} c^2 dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} dx^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} dy^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} dz^2.$$

Pour simplifier le calcul, nous écrirons :

$$ds^2 = e^{\frac{2\Phi}{c^2}} c^2 dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} dl^2.$$

Bien entendu, la distance élémentaire dl est définie par :
$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Posons : $f = e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$ et $g = -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}$; on a alors :

$$\frac{\partial f}{c\partial t} = \frac{2}{c^2}\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{c\partial t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{2}{c^2}\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{\partial l},$$
$$\frac{\partial g}{c\partial t} = \frac{2}{c^2}\ e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{c\partial t},$$
$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{2}{c^2}\ e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{\partial l}.$$

Nous utilisons ici des dérivées partielles, car Φ, f et g varient en fonction de t et de l.

Comme nous avons limité à deux le nombre de variables, nous allons obtenir deux équations pour les géodésiques.

Utilisons la méthode de Lagrange, et examinons la première équation :

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial f}{c\partial t}\ \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\ \frac{\partial g}{c\partial t}\ \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = \frac{d}{ds}\left(f\ \frac{cdt}{ds}\right)\ ;$$

$$\frac{1}{c^2}\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{c\partial t}\ \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\ e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{c\partial t}\ \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = \frac{d}{ds}\left(e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{cdt}{ds}\right).$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial \Phi}{c\partial t}\ \left[e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \left(\frac{dl}{ds}\right)^2\right] = \frac{d\overline{E}}{ds}.$$

Dans le crochet, on a :

$e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = ch^2\ \frac{w}{c} + sh^2\ \frac{w}{c} = ch\ \frac{2w}{c} = \frac{1}{1-\frac{v_{loc}^2}{c^2}} + \frac{\frac{v_{loc}^2}{c^2}}{1-\frac{v_{loc}^2}{c^2}} = \frac{1+\frac{v_{loc}^2}{c^2}}{1-\frac{v_{loc}^2}{c^2}}\,;$
l'équation pourra donc s'écrire, par exemple :

$$\frac{d\overline{E}}{ds} = \frac{\partial \frac{\Phi}{c^2}}{c\partial t}\ ch\ \frac{2w}{c}.$$

Voyons maintenant la seconde équation :

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial f}{\partial l}\ \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\ \frac{\partial g}{\partial l}\ \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = \frac{d}{ds}\left(g\ \frac{dl}{ds}\right)\ ;$$

$$\frac{1}{c^2}\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{\partial l}\ \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\ e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{\partial \Phi}{\partial l}\ \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = \frac{d}{ds}\left(-e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \frac{dl}{ds}\right)\ ;$$

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial \Phi}{\partial l}\ \left[e^{\frac{2\Phi}{c^2}}\ \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}\ \left(\frac{dl}{ds}\right)^2\right] = -\frac{d\overline{p}}{ds}.$$

Comme précédemment, remplaçons le crochet par $ch\ \frac{2w}{c}$:

$$\frac{d\overline{p}}{ds} = -\frac{\partial \frac{\Phi}{c^2}}{\partial l}\ ch\ \frac{2w}{c}.$$

Rétablissons les trois dimensions spatiales, multiplions par m_0c^2 ; nous obtenons (sous forme vectorielle) :

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} E \\ c\ p_x \\ c\ p_y \\ c\ p_z \end{pmatrix} = m_0\ ch\frac{2w}{c}\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{c\partial t} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On aura reconnu, à gauche, la dérivée du quadri-vecteur impulsion-énergie par rapport au temps propre s.

Dans le membre de droite, on trouve un quadrivecteur qui ressemble au quadrigradient du potentiel Φ (gradient quadri-dimensionnel, par rapport aux quatre coordonnées de Minkowski : ct, x, y, z), mais avec la signature

$(+,-,-,-)$ au lieu de $(+,+,+,+)$: c'est ce que j'appelle le quadrigradient signé. Il équivaut à un quadrivecteur accélération.

Si $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, alors $\overline{E}$ est constant sur la trajectoire ; si $\frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0$, alors c'est $\overline{p}$ qui est constant. Pour le moment, nous supposons que le champ est statique : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$; l'énergie du mobile (la planète) est donc constante. Mais que se passerait-il si le champ n'était pas statique ? Dans ce cas, l'approche basée sur les géodésiques n'entrerait-elle pas en conflit avec la conservation de l'énergie ?

Prenons l'exemple d'un surfer sur une vague. Il se situe à l'avant de la vague, où $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ est positif (le niveau de l'eau monte). Faut-il en déduire que l'énergie du surfer augmente ? Non, car il surfe à hauteur constante (il ne monte pas sur la crête de la vague). Pour que l'énergie augmente, il faut que la force travaille ; en l'occurence, la force, c'est le poids du surfer ; cette force travaille lorsque le surfer monte ou descend (et non lorsque la vague monte ou descend derrière lui). De la même façon, nous n'avons aucune raison de penser que l'énergie d'une planète doive augmenter, simplement parce-qu'au point (fixe) où elle passe à un instant donné, le potentiel gravitationnel est croissant. Ce qui compte, c'est, naturellement, le potentiel dans lequel est plongé un point (mobile) lié à la planète.

Il y a bien contradiction, dans le cas d'un potentiel non statique, entre la notion de géodésique, telle que nous l'avons présentée jusqu'ici, et la conservation de l'énergie. Il faudra donc utiliser les formules ci-dessus, basées sur les géodésiques et le gradient quadri-dimensionnel, avec prudence. Pour le moment, nous allons aborder un modèle simplifié du système solaire, dans lequel le potentiel sera supposé constant : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$; nous savons que le recours aux géodésiques ne soulève pas de difficulté dans ce cas particulier. Mais lorsque nous parlerons de systèmes stellaires doubles, qui génèrent un champ variable dans le temps (champ tournant), nous devrons nous poser la question suivante : les formules que nous venons de voir doivent-elles être abandonnées, ou bien peuvent-elles être utilisées, dans certaines conditions ? Par exemple, pouvons-nous éliminer le problème en nous plaçant dans un repère mobile judicieusement choisi, dans lequel $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ s'annule ?

19 Etude du système solaire : les bases

A partir d'ici, nous allons étudier longuement le mouvement d'une particule test dans le champ gravitationnel d'une masse ponctuelle (ou, si on préfère, le mouvement d'une planète autour du Soleil) ; pour cela, nous utiliserons les équations obtenues précédemment, en coordonnées polaires.

Les trajectoires sont définies par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} 1)\ ds^2 = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}\ dt^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ d\theta^2 \text{ (équation de la métrique) ;} \\ 2)\ \overline{E} = \frac{E}{m_0 c^2} = e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{k}{r}}\ ch\frac{w}{c} = c^{te} \text{ (conservation de E) ;} \\ 3)\ \overline{\mu} = \frac{\mu}{m_0 c} = \frac{r||\vec{u} \wedge \vec{v}||}{m_0 c} = e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ \frac{d\theta}{ds} = e^{\frac{k}{r}}\ r\ sh\frac{w}{c}\ sin\alpha = c^{te} \text{ (conservation de } \mu). \end{cases}$$

Comme précédemment, α désigne l'angle $(\vec{u},\ \vec{v})$ formé par le rayon vecteur $\vec{u}$ et la vitesse $\vec{v}$.

Toutes les quantités sont évaluées par l'observateur distant (E, μ, r, etc.), sauf la vitesse v et la rapidité w, qui sont évaluées par l'observateur local.

20 Aphélie et périhélie

Lorsqu'une planète tourne autour du Soleil, elle s'éloigne et se rapproche de celui-ci, alternativement. La distance r passe par un maximum (à l'aphélie, ou à l'apoastre, s'il s'agit d'un astre autre que le Soleil) et par un minimum (au périhélie, ou périastre) où la dérivée $\frac{dr}{dt}$ s'annule. Nous allons rechercher ces deux valeurs de r : r_1 et r_2.

Dans l'équation de la métrique, divisons les deux membres par ds^2 ; il vient :

$$1 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} r^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.$$

Nous avons vu que $\overline{E} = e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{cdt}{ds}$ et $\overline{\mu} = r^2\ e^{\frac{2k}{r}}\ \frac{d\theta}{ds}$; pour étudier l'orbite d'une planète, il est intéressant de substituer $\overline{E}e^{\frac{2k}{r}}$ à $\frac{cdt}{ds}$ et $\frac{\overline{\mu}}{r^2}e^{-\frac{2k}{r}}$ à $\frac{d\theta}{ds}$.

Nous obtenons :

$$1 = e^{-\frac{2k}{r}} \left(\overline{E}e^{\frac{2k}{r}}\right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} r^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{r^2}e^{-\frac{2k}{r}}\right)^2 \ ;$$

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \ \overline{E}^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \ \frac{\overline{\mu}^2}{r^2}.$$

Remplaçons ds par $\frac{r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta}{\overline{\mu}}$; il vient :

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \ \overline{E}^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{\frac{r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta}{\overline{\mu}}}\right)^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \ \frac{\overline{\mu}^2}{r^2} \ ;$$

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \ \overline{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \ \overline{\mu}^2 \left(\frac{dr}{r^2 d\theta}\right)^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \ \frac{\overline{\mu}^2}{r^2}.$$

Posons : $u = \frac{1}{r}$ (donc $du = -\frac{dr}{r^2}$) ; notre équation devient :

$$1 = e^{2ku} \ \overline{E}^2 - e^{-2ku} \ \overline{\mu}^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - e^{-2ku} \ \overline{\mu}^2 u^2.$$

Cette équation nous sera très utile par la suite ; mais dans l'immédiat, notre but est d'étudier l'aphélie et le périhélie de l'orbite (s'il s'agit d'une planète tournant autour du Soleil), ou l'apoastre et le périastre (dans le cas général).

Si une planète tourne autour du Soleil sur une orbite elliptique (avec ou sans précession), la distance r passe alternativement par un maximum r_1 (à l'aphélie) et par un minimum r_2 (au périhélie). Ces deux points de l'orbite sont caractérisés par le fait que $\frac{du}{d\theta} = 0$; donc, pour $u = u_1 = \frac{1}{r_1}$ et $u = u_2 = \frac{1}{r_2}$, on a : $1 = e^{2ku} \ \overline{E}^2 - e^{-2ku} \ \overline{\mu}^2 u^2$, donc $\overline{E}^2 = e^{-4ku} \ \overline{\mu}^2 u^2 + e^{-2ku}$.

D'où on tire : $e^{-4ku_1} \ \overline{\mu}^2 u_1^2 + e^{-2ku_1} = e^{-4ku_2} \ \overline{\mu}^2 u_2^2 + e^{-2ku_2}$;
ce qui permet d'exprimer $\overline{\mu}^2$ (puis $\overline{E}^2$) en fonction de u_1 et u_2 :

$$\overline{\mu}^2 = \frac{e^{-2ku_2} - e^{-2ku_1}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{2k(u_1+u_2)}$, on obtient :

$$\overline{\mu}^2 = \frac{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}}.$$

On en déduit l'expression de l'énergie :

$$\overline{E}^2 = e^{-4ku_1}\ \overline{\mu}^2 u_1^2 + e^{-2ku_1} = e^{-4ku_1}\ \frac{e^{-2ku_2} - e^{-2ku_1}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}} u_1^2 + e^{-2ku_1}\ ;$$

$$\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2k(2u_1+u_2)} - u_1^2 e^{-6ku_1} + u_1^2 e^{-6ku_1} - u_2^2 e^{-2k(u_1+2u_2)}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}}\ ;$$

$$\overline{E}^2 = e^{-2k(u_1+u_2)} \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{2k(u_1+u_2)}$, on obtient :

$$\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}}.$$

Il peut être utile de calculer r_1 et r_2 en fonction de $\overline{E}$ et $\overline{\mu}$; commençons par remplacer les expressions de $\overline{\mu}^2$ et $\overline{E}^2$ par leurs développements limités d'ordre un en k (approximation acceptable si k est très petit par rapport à r_1 et r_2).

$$\overline{\mu}^2 \approx \frac{(1+2ku_1) - (1+2ku_2)}{u_1^2[1+2k(u_2-u_1)] - u_2^2[1+2k(u_1-u_2)]}\ ;$$

$$\overline{\mu}^2 \approx \frac{2k(u_1-u_2)}{u_1^2 - u_2^2} \approx \frac{2k}{u_1+u_2} \approx \frac{2kr_1r_2}{r_1+r_2}.$$

$$\overline{E}^2 \approx \frac{u_1^2(1-2ku_1) - u_2^2(1-2ku_2)}{u_1^2[1+2k(u_2-u_1)] - u_2^2[1+2k(u_1-u_2)]}\ ;$$

$$\overline{E}^2 \approx \frac{(u_1^2-u_2^2) - 2k(u_1^3-u_2^3)}{(u_1^2-u_2^2) - 2k(u_1^2+u_2^2)(u_1-u_2)}\ ;$$

$$\overline{E}^2 \approx \frac{(u_1+u_2) - 2k(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)}{(u_1+u_2) - 2k(u_1^2+u_2^2)}\ ;$$

$$\overline{E}^2 \approx \frac{1-2k\frac{u_1^2+u_1u_2+u_2^2}{u_1+u_2}}{1-2k\frac{u_1^2+u_2^2}{u_1+u_2}} \;;$$

$$\overline{E}^2 \approx \left[1-2k\frac{u_1^2+u_1u_2+u_2^2}{u_1+u_2}\right]\left[1+2k\frac{u_1^2+u_2^2}{u_1+u_2}\right] \;;$$

$$\overline{E}^2 \approx 1-2k\frac{u_1^2+u_1u_2+u_2^2}{u_1+u_2}+2k\frac{u_1^2+u_2^2}{u_1+u_2} \;;$$

$$\overline{E}^2 \approx 1-\frac{2ku_1u_2}{u_1+u_2} \approx 1-\frac{2k}{r_1+r_2}.$$

De cette dernière égalité, on tire :

$$r_1+r_2 \approx \frac{2k}{1-\overline{E}^2}.$$

D'autre part :

$$r_1r_2 \approx \frac{\overline{\mu}^2}{2k}(r_1+r_2) \approx \frac{\overline{\mu}^2}{2k}\,\frac{2k}{1-\overline{E}^2} \approx \frac{\overline{\mu}^2}{1-\overline{E}^2}.$$

Donc r_1 et r_2 sont (en première approximation) les racines de l'équation $(1-\overline{E}^2)X^2-2kX+\overline{\mu}^2=0$; ce qui nous donne :

$$r_1 \approx \frac{k+\sqrt{k^2-\overline{\mu}^2(1-\overline{E}^2)}}{1-\overline{E}^2} \;;$$

$$r_2 \approx \frac{k-\sqrt{k^2-\overline{\mu}^2(1-\overline{E}^2)}}{1-\overline{E}^2}.$$

Voici une autre façon d'aborder la recherche de l'aphélie et du périhélie. Reprenons l'équation $\overline{E}^2 = e^{-4ku}\ \overline{\mu}^2 u^2 + e^{-2ku}$; écrivons-la sous la forme :

$$e^{2ku}\overline{E}^2 - e^{-2ku}u^2\overline{\mu}^2 = 1, \text{ou encore :}$$
$$e^{2\frac{k}{r}}\overline{E}^2 - e^{-2\frac{k}{r}}\frac{\overline{\mu}^2}{r^2} = 1.$$

On peut d'ailleurs remarquer que ces égalités signifient tout simplement que $ch^2\frac{w}{c} - sh^2\frac{w}{c} = 1$, avec :

$$ch\frac{w}{c} = e^{ku}\overline{E} = e^{\frac{k}{r}}\overline{E} \text{ (ce qui est vrai dans tous les cas) ;}$$

$$sh\frac{w}{c} = e^{-ku}u\overline{\mu} = e^{-\frac{k}{r}}\frac{\overline{\mu}}{r} \text{ (ce qui est vrai seulement à l'aphélie et au périhélie).}$$

Ensuite, pour $\overline{E}$ et $\overline{\mu}$ fixés, on étudie par exemple les courbes des fonctions $f(r) = e^{2\frac{k}{r}}\overline{E}^2 - 1$ et $g(r) = e^{-2\frac{k}{r}}\frac{\overline{\mu}^2}{r^2}$, et on recherche leurs points d'intersection. Ce n'est pas la méthode que nous avons choisie, car cette recherche est relativement délicate.

21 Orbites circulaires

Nous allons calculer la vitesse circulaire, c'est-à-dire la vitesse (locale) d'une planète se déplaçant sur une orbite circulaire de rayon r.

On peut partir, par exemple, de la formule :

$$\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}} = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{e^{2k(u_2+u_1)}\left[u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}\right]}.$$

Pour étudier le cas de l'orbite circulaire, faisons tendre r_2 vers r_1, donc u_2 vers u_1.

Posons : $F(x) = x^2\ e^{-2kx}$ et $G(x) = x^2\ e^{-4kx}$.

Quand u_2 tend vers u_1, $\overline{E}^2$ tend vers $\frac{F'_x(u_1)}{e^{4ku_1}\ G'_x(u_1)}$.

$$F'(x) = 2xe^{-2kx} + x^2(-2k)e^{-2kx} = 2x(1-kx)e^{-2kx} \text{ ;}$$

$$G'(x) = 2xe^{-4kx} + x^2(-4k)e^{-4kx} = 2x(1-2kx)e^{-4kx}.$$

Donc pour une orbite circulaire on a :

$$\overline{E}^2 = \frac{2u(1-ku)e^{-2ku}}{e^{4ku}\ 2u(1-2ku)e^{-4ku}} = \frac{1-\frac{k}{r}}{1-\frac{2k}{r}}\ e^{-\frac{2k}{r}} = \frac{r-k}{r-2k}\ e^{-\frac{2k}{r}}.$$

Comme $\overline{E} = e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{cdt}{ds}$ et $ch\frac{w}{c} = e^{-\frac{k}{r}}\ \frac{cdt}{ds}$, il est clair que $\overline{E} = e^{-\frac{k}{r}}\ ch\frac{w}{c}$;

$$ch^2\frac{w_c}{c} = e^{\frac{2k}{r}}\ \overline{E}^2 = \frac{1-\frac{k}{r}}{1-\frac{2k}{r}} = \frac{r-k}{r-2k}.$$

Bien entendu, w_c désigne la rapidité circulaire : $ch\frac{w_c}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_c^2}{c^2}}}$ (où v_c désigne la vitesse circulaire).

$$sh^2\frac{w_c}{c} = ch^2\frac{w_c}{c} - 1 = \frac{r-k}{r-2k} - 1 = \frac{(r-k)-(r-2k)}{r-2k} = \frac{k}{r-2k}\ ;$$

$$\frac{v_c}{c} = th\frac{w_c}{c} = \frac{sh\frac{w_c}{c}}{ch\frac{w_c}{c}} = \sqrt{\frac{k}{r-2k}.\frac{r-2k}{r-k}} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}.$$

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}.$$

Quand r varie de l'infini à $2k$, $ch^2\frac{w_c}{c}$ varie de 1 à l'infini, donc la rapidité w_c varie de 0 à l'infini, et la vitesse circulaire v_c varie de 0 à c.

Il en résulte qu'il ne peut pas y avoir d'orbite circulaire de rayon inférieur à $2k$, ou $\frac{2GM}{c^2}$.

Dans le même temps, l'énergie $\overline{E}$ décroît de 1 jusqu'à un minimum, puis croît de nouveau et tend vers l'infini.
Le minimum est atteint pour $r = (3+\sqrt{5})k$.

En reprenant les formules vues précédemment, et en remarquant que $\overline{\mu} = r\ \overline{p}$, nous obtenons quelques égalités qui pourront être utiles par la suite :

$$\begin{cases} \overline{E} = e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{cdt}{ds} = e^{-\frac{k}{r}}\ ch\frac{w}{c} = e^{-\frac{k}{r}}\ \sqrt{\frac{r-k}{r-2k}}\ ; \\ \overline{\mu} = r^2\ e^{\frac{2k}{r}}\ \frac{d\theta}{ds} = e^{\frac{k}{r}}\ r\ sh\frac{w}{c} = e^{\frac{k}{r}}\ r\ \sqrt{\frac{k}{r-2k}}. \end{cases}$$

Le nombre $k = \frac{GM}{c^2}$ étant fixé, à chaque valeur de la distance radiale r correspondent des valeurs de la vitesse circulaire v_c, de l'énergie $\overline{E}$ et du moment cinétique $\overline{\mu}$, bien déterminées et facilement calculables.

Pour $r >> k$, on pourra utiliser la formule approchée :

$$\frac{v_c}{c} \approx \sqrt{\frac{k}{r}}.$$

22 Vitesse de libération

Cherchons maintenant la vitesse de libération (ou vitesse d'évasion).

Nous allons supposer d'abord que le mobile se déplace (radialement) sur une droite passant par le corps central ponctuel (le "Soleil") ; donc $\frac{d\theta}{ds} = 0$.

Partons des formules :

$$1 = e^{-\frac{2k}{r}} \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \;;$$

$$\overline{E} = e^{-\frac{2k}{r}} \frac{cdt}{ds}.$$

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \overline{E}^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{\overline{E}\; dr}{e^{-\frac{2k}{r}}\; cdt}\right)^2 \;;$$

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \overline{E}^2 - e^{\frac{6k}{r}}\; \overline{E}^2 \left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 \;;$$

$$\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 = \frac{e^{\frac{2k}{r}} \overline{E}^2 - 1}{e^{\frac{6k}{r}} \overline{E}^2} = e^{\frac{-4k}{r}} - \frac{e^{\frac{-6k}{r}}}{\overline{E}^2} \;;$$

$$\frac{v_{dist}}{c} = \frac{dr}{cdt} = e^{\frac{-2k}{r}} \sqrt{1 - \frac{e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2}}.$$

Notons v la vitesse locale : $v = v_{loc}$.

$$\frac{v}{c} = \frac{v_{loc}}{c} = e^{\frac{2k}{r}} \ \frac{v_{dist}}{c} = \sqrt{1 - \frac{e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2}}.$$

Pour calculer la vitesse de libération v_l, on remplace $\overline{E}$ par 1 (car v doit tendre vers 0 quand r tend vers l'infini). On obtient :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - e^{\frac{-2k}{r}}}.$$

Quand r tend vers l'infini, v_l tend vers 0 ; quand r tend vers 0, v_l tend vers c.

Pour $r >> k$, on pourra utiliser la formule approchée :

$$\frac{v_l}{c} \approx \sqrt{\frac{2k}{r}}.$$

Nous pouvons retrouver ce résultat, pour une orbite quelconque, à l'aide des formules suivantes :

$$ch\frac{w}{c} = e^{-\frac{k}{r}} \ \frac{c \ dt}{ds} = \frac{E}{m_0 c^2} \ e^{\frac{k}{r}} = \overline{E} \ e^{\frac{k}{r}} \ ;$$

$$\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2 - u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1 - u_2)}}.$$

Au périhélie, on aura :

$$ch^2\frac{w_2}{c} = \overline{E}^2 \ e^{2ku_2} = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2 - u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1 - u_2)}} \ e^{2ku_2}.$$

Faisons tendre r_1 (aphélie) vers l'infini, donc u_1 vers 0 ; alors $u_1^2 e^{-4ku_1}$ tend vers 0, et $ch^2\frac{w_2}{c}$ tend vers $2e^{2ku_2}$; donc :

$$ch^2\frac{w_l}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{c^2}}} = e^{2ku} \ ;$$

$$1-\frac{v_l^2}{c^2}=e^{-2ku} \text{ donc } \frac{v_l^2}{c^2}=1-e^{-2ku} \text{ donc } \frac{v_l}{c}=\sqrt{1-e^{-2ku}}.$$

Nous allons considérer de nouveau un mobile en chute libre (radiale) vers le corps central (ponctuel), et nous allons calculer le temps nécessaire pour que la collision se produise. Nous allons adopter d'abord le point de vue d'un observateur lié au mobile, puis celui de l'observateur distant.

Pour l'observateur lié au mobile, le temps propre (infinitésimal) est ds. On a :
$ds^2=e^{-\frac{2k}{r}}\ c^2\ dt^2-e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2$, avec :
$dt=dt_{dist}=\frac{dr}{v_{dist}}=\frac{dr}{v_{dist}}=\frac{dr}{e^{\frac{-2k}{r}}\ v_{loc}}=\frac{e^{\frac{2k}{r}}\ dr}{v}$, donc :
$ds^2=e^{-\frac{2k}{r}}\ c^2\ \left(\frac{e^{\frac{2k}{r}}\ dr}{v}\right)^2-e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2=\left(\frac{c^2}{v^2}-1\right)\ e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2$.
Nous avons vu que $v=v_{loc}=c\ \sqrt{1-\frac{e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2}}$, donc :
$ds^2=\left(\frac{1}{1-\frac{e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2}}-1\right)\ e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2=\left(\frac{\overline{E}^2}{\overline{E}^2-e^{\frac{-2k}{r}}}-\frac{\overline{E}^2-e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2-e^{\frac{-2k}{r}}}\right)\ e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2=\frac{e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2-e^{\frac{-2k}{r}}}\ e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2\,;$

$$ds=\frac{dr}{\sqrt{\overline{E}^2-e^{\frac{-2k}{r}}}}.$$

Quand r tend vers 0, on a : $ds\approx\frac{dr}{\overline{E}}$; donc le temps propre du mobile ne diverge pas au voisinage de $r=0$, ce qui signifie que, du point de vue du mobile, la collision va se produire au bout d'un temps fini.

Etudions maintenant le point de vue de l'observateur distant.
On sait que $\frac{v_{dist}^2}{c^2}=\frac{dr^2}{c^2\ dt^2}=e^{\frac{-4k}{r}}\ \frac{v_{loc}^2}{c^2}=e^{\frac{-4k}{r}}\ \left(1-\frac{e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2}\right)$, donc :

$$c\ dt=\frac{e^{\frac{2k}{r}}\ dr}{\sqrt{1-\frac{e^{\frac{-2k}{r}}}{\overline{E}^2}}}.$$

Quand r tend vers 0, on a : $c\ dt\approx e^{\frac{2k}{r}}\ dr$; cette quantité diverge au voisinage de $r=0$, ce qui signifie que, pour l'observateur distant, la collision n'aura jamais lieu.

23 Orbites elliptiques et lois de Kepler

Si la vitesse de la planète est inférieure à la vitesse de libération, son orbite va être, en première approximation, elliptique. Nous allons montrer que la métrique triviale de Ni permet bien de retrouver les lois de Kepler.

Dans la section "Aphélie et périhélie", nous avons démontré que :

$$1 = e^{2ku}\ \overline{E}^2 - e^{-2ku}\ \overline{\mu}^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - e^{-2ku}\ \overline{\mu}^2 u^2.$$

On en tire :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = e^{4ku}\frac{\overline{E}^2}{\overline{\mu}^2} - u^2 - \frac{e^{2ku}}{\overline{\mu}^2} = e^{2ku}\left[e^{2ku}\frac{\overline{E}^2}{\overline{\mu}^2} - e^{-2ku}u^2 - \frac{1}{\overline{\mu}^2}\right]\ ;$$

$$d\theta = \frac{\pm e^{-ku}du}{\sqrt{e^{2ku}\frac{\overline{E}^2}{\overline{\mu}^2} - e^{-2ku}u^2 - \frac{1}{\overline{\mu}^2}}}.$$

Dans cette section, nous allons étudier le cas où r_1 et r_2 sont deux nombres réels positifs, très supérieurs à k. Les nombres $u_1 = \frac{1}{r_1}$ et $u_2 = \frac{1}{r_2}$ sont donc également deux réels positifs. Comme $r_1 + r_2 \approx \frac{2k}{1-\overline{E}^2}$ et $r_1 r_2 \approx \frac{\overline{\mu}^2}{1-\overline{E}^2}$, nous nous plaçons donc dans le cas où $1 - \overline{E}^2 > 0$, donc $0 < \overline{E} < 1$.

Posons : $A = e^{2ku}\frac{\overline{E}^2}{\overline{\mu}^2} - e^{-2ku}u^2 - \frac{1}{\overline{\mu}^2}$, puis remplaçons $\overline{\mu}^2$ et $\overline{E}^2$ par leurs expressions calculées précédemment. Il vient :

$$A = \frac{u_1^2 e^{2k(u-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u-u_2)}}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}} - \frac{u^2 e^{2k(u_1-u)} - u^2 e^{2k(u_2-u)}}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}} - \frac{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}}\ ;$$

$$A = \frac{u_1^2\left[e^{2k(u-u_1)} - e^{2k(u_2-u_1)}\right] + u_2^2\left[e^{2k(u_1-u_2)} - e^{2k(u-u_2)}\right] + u^2\left[e^{2k(u_2-u)} - e^{2k(u_1-u)}\right]}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}}.$$

Notons N le numérateur de cette fraction, D son dénominateur, et B_1, B_2 et B les trois crochets du numérateur, associé à u_1^2, u_2^2 et u^2. (Ils se déduisent les uns des autres par permutation circulaire.)

Nous allons supposer pour le moment que k est très petit par rapport à r, r_1 et r_2. Ceci nous autorise à remplacer nos fonctions par des développements limités d'ordre un ou deux en k ; en raison des simplifications qui vont

se produire, nous allons être obligés de choisir l'ordre deux.

$$B_1 = e^{2k(u-u_1)} - e^{2k(u_2-u_1)} \approx (1+2k(u-u_1)+2k^2(u-u_1)^2) - (1+2k(u_2-u_1)+2k^2(u_2-u_1)^2)\ ;$$

$$B_1 \approx 2k(u-u_2) + 2k^2(u^2 - 2uu_1 + u_1^2 - u_2^2 + 2u_1u_2 - u_1^2)\ ;$$

$$B_1 \approx 2k(u-u_2) + 2k^2(u-u_2)(u+u_2-2u_1).$$

De même : $B_2 \approx 2k(u_1-u) + 2k^2(u_1-u)(u_1+u-2u_2)$
et $B \approx 2k(u_2-u_1) + 2k^2(u_2-u_1)(u_2+u_1-2u)$.

Dans l'expression de $N = u_1^2B_1 + u_2^2B_2 + u^2B$, regroupons les termes en k d'une part, en k^2 d'autre part :

$$N \approx 2k\left[u_1^2(u-u_2) + u_2^2(u_1-u) + u^2(u_2-u_1)\right]\ ...$$

$$... +2k^2\left[u_1^2(u-u_2)(u+u_2-2u_1) + u_2^2(u_1-u)(u_1+u-2u_2) + u^2(u_2-u_1)(u_2+u_1-2u)\right]\ ;$$

$$N \approx 2k\left[u^2(u_2-u_1) + u(u_1-u_2)(u_1+u_2) + u_1u_2(u_2-u_1)\right]\ ...$$

$$... +2k^2\left[u^2\left((u_2-u_1)(u_2+u_1-2u) + u_1^2 - u_2^2\right) + u(u_1^2u_2 - 2u_1^3 - u_1^2u_2 + u_1u_2^2\right]\ ...$$

$$...\ -2k^2\left[u_1u_2^2 + 2u_2^3) - u_1^2u_2(u_2-2u_1) + u_1u_2^2(u_1-2u_2)\right]\ ;$$

$$N \approx 2k(u_2-u_1)(u^2 - u(u_1+u_2) + u_1u_2)\ ...$$

$$... +2k^2\left[u^2(u_2-u_1)(-2u) + 2u(u_2-u_1)(u_1^2+u_1u_2+u_2^2) + u_1u_2(-u_1u_2 + 2u_1^2 + u_2u_1 - 2u_2^2)\right]\ ;$$

$$N \approx 2k(u_2-u_1)(u-u_1)(u-u_2)\ ...$$

$$...\ +2k^2(u_2-u_1)\left[-2u^3 + 2u(u_1^2+u_1u_2+u_2^2) - 2u_1u_2(u_1+u_2)\right]\ ;$$

$$N \approx 2k(u_2-u_1)(u-u_1)(u-u_2)\ ...$$

$$...\ -4k^2(u_2-u_1)\left[u^3 - u(u_1^2+u_1u_2+u_2^2) + u_1u_2(u_1+u_2)\right]\ ;$$

$$N \approx 2k(u_2-u_1)(u-u_1)(u-u_2)\ ...$$

$$... \ - 4k^2(u_2 - u_1)(u - u_1)(u2 - uu_1 - u_1u_2 - u_2^2) \ ;$$

$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u - u_1)(u - u_2) - 4k^2(u_2 - u_1)(u - u_1)(u + u_1 + u_2) \ ;$$
$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u - u_1)(u - u_2)\left[1 - 2k(u + u_1 + u_2)\right] \ ;$$
$$N \approx 2k(u_1 - u_2)(u_2 - u)(u - u_1)\left[1 - 2k(u + u_1 + u_2)\right].$$

En ce qui concerne le dénominateur :

$$D = e^{2ku_1} - e^{2ku_2} \approx (1 + 2ku_1 + 2k^2u_1^2) - (1 + 2ku_2 + 2k^2u_2^2) \approx 2k(u_1 - u_2) + 2k^2(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) \ ;$$
$$D \approx 2k(u_1 - u_2)\left[1 + k(u_1 + u_2)\right].$$

Par conséquent :

$$A = \frac{N}{D} \approx \frac{2k(u_1 - u_2)(u_2 - u)(u - u_1)\left[1 - 2k(u + u_1 + u_2)\right]}{2k(u_1 - u_2)\left[1 + k(u_1 + u_2)\right]} \ ;$$
$$A \approx \frac{(u_2 - u)(u - u_1)\left[1 - 2k(u + u_1 + u_2)\right]}{1 + k(u_1 + u_2)}.$$

Notre équation de départ devient donc :

$$d\theta = \frac{\pm e^{-ku}\ du}{\sqrt{A}} \approx \pm(1 - ku)\sqrt{\frac{1 + k(u_1 + u_2)}{1 - 2k(u + u_1 + u_2)}}\ \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} \ ;$$

$$d\theta \approx \pm(1 - ku)(1 + k\frac{u_1 + u_2}{2})\left[1 + k(u + u_1 + u_2)\right]\ \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} \ ;$$
$$d\theta \approx \pm\left[1 - ku + k\frac{u_1 + u_2}{2} + k(u + u_1 + u_2)\right]\ \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} \ ;$$
$$d\theta \approx \pm\left[1 + k\frac{3(u_1 + u_2)}{2}\right]\ \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}}$$

Nous allons maintenant poser :

$$u = \frac{1}{2}(u_2 + u_1) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\ cos\psi,$$

où ψ est un angle qui s'annule pour $u = u_2$ (périhélie), qui vaut 180° pour $u = u_1$ (aphélie), et qui varie de 360° quand la planète parcourt son orbite.

$$u_2 - u = u_2 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\ cos\psi = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)(1 - cos\psi)\ ;$$

$$u - u_1 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_1 - u_1 + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\ cos\psi = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)(1 + cos\psi)\ ;$$

$$(u_2 - u)(u - u_1) = \frac{1}{4}(u_2 - u_1)^2(1 - cos^2\psi) = \frac{1}{4}(u_2 - u_1)^2\ sin^2\psi\ ;$$

$$\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)} = \pm\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\ sin\psi\ ;$$

$$du = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\ d(cos\psi) = -\frac{1}{2}(u_2 - u_1)\ sin\psi\ d\psi.$$

Ces deux dernières égalités prouvent (au signe près) que :

$$\frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} = d\psi.$$

L'équation du mouvement devient donc :

$$d\theta \approx \left[1 + k\frac{3(u_1 + u_2)}{2}\right]\ d\psi.$$

Si k est très petit par rapport à r_1 et r_2, le terme $k\frac{3(u_1+u_2)}{2}$ peut être négligé en première approximation ; on obtient alors : $d\theta \approx d\psi$, donc :

$$u \approx \frac{1}{2}(u_2 + u_1) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\ cos\theta\ ;$$

$$u \approx \frac{1}{2}(u_2 + u_1)\left[1 + \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}\ cos\theta\right].$$

Rappelons que $u = \frac{1}{r}$;
posons $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}(u_2 + u_1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}) = \frac{r_1+r_2}{2r_1r_2}$, et $e = \frac{u_2-u_1}{u_2+u_1} = \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$;
notre équation s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\ cos\ \theta)\ ;$$

$$r = \frac{p}{1 + e\ cos\ \theta}.$$

Cette équation est celle d'une ellipse ; c'est la première loi de Kepler ! Le nombre p est le paramètre de l'orbite ; e est son excentricité. Si $r_1 > r_2$, on a : $0 < e < 1$.

Nous allons maintenant étudier la période de révolution T d'une planète ; reprenons les égalités :

$$E = m_0 c^2 e^{-\frac{2k}{r}} \frac{dt}{ds} \approx m_0 c^2 \frac{dt}{ds} ;$$
$$\mu = m_0 c\, r^2\, e^{\frac{2k}{r}} \frac{d\theta}{ds} \approx m_0 c\, r^2 \frac{d\theta}{ds} \approx 2 m_0 c \frac{dA}{ds}.$$

Nous désignons par dA l'aire balayée pendant le temps dt par le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète.

$$dt \approx \frac{E}{m_0 c^2} ds \approx \frac{E}{m_0 c^2} \frac{2 m_0 c}{\mu} dA = \approx \frac{2E}{\mu\, c} dA ;$$

$$\frac{dA}{dt} \approx \frac{\mu\, c}{2E}.$$

Pour une planète donnée (μ et E fixés) cette quantité est constante, donc l'aire balayée par le rayon vecteur qui joint le Soleil à la planète est proportionnelle au temps. On reconnaît la seconde loi de Kepler (ou loi des aires).

En intégrant dt sur un tour complet de l'orbite :

$$T \approx \frac{2E}{\mu c} A.$$

Rappelons que : $\overline{\mu} = \frac{\mu}{m_0 c}$, $\overline{\mu}^2 \approx \frac{2k r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, $\overline{E} = \frac{E}{m_0 c^2}$, $\overline{E}^2 \approx 1 - \frac{2k}{r_1 + r_2}$.
On en tire :

$$\frac{E^2}{\mu^2 c^2} = \frac{\overline{E}^2}{\overline{\mu}^2} \approx \frac{1 - \frac{2k}{r_1+r_2}}{\frac{2k r_1 r_2}{r_1+r_2}} \approx \frac{r_1 + r_2}{2k r_1 r_2} \approx \frac{1}{pk} ;$$
$$T^2 \approx \frac{4E^2}{\mu^2 c^4} A^2 \approx \frac{4}{pkc^2} A^2.$$

Notons a le demi-grand axe de l'ellipse : $a = \frac{r_1+r_2}{2}$.
L'aire de l'ellipse est donnée par la formule :
$A = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$; $A^2 = \pi^2 a^4(1-e^2) = \pi^2 a^3[a(1-e^2)] = \pi^2 a^3 p$ (car $p = a(1-e^2)$). Donc :

$$T^2 \approx \frac{4}{pkc^2}\, A^2 \approx \frac{4\pi^2 a^3 p}{pkc^2} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \;;$$

$$T^2 \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

On reconnaît la troisième loi de Kepler (ou loi des périodes).

24 Orbites paraboliques

L'étude des orbites paraboliques se déduit facilement de celle des orbites elliptiques : il suffit de faire tendre r_1 vers l'infini, donc u_1 vers 0. Comme $\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}}$, on voit facilement que $\overline{E}$ tend vers 1, ce qui est cohérent avec les égalités (moins rigoureuses) : $r_1+r_2 \approx \frac{2k}{1-\overline{E}^2}$ et $r_1 r_2 \approx \frac{\overline{\mu}^2}{1-\overline{E}^2}$. D'autre part, $e = \frac{u_2-u_1}{u_2+u_1} = \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$; on voit donc que l'excentricité de l'orbite tend vers 1. L'équation de l'orbite, en coordonnées polaires, devient donc :

$$r = \frac{p}{1+cos\ \theta}.$$

Cette équation est celle d'une parabole.

25 Orbites hyperboliques

Il nous reste à étudier le cas où $\overline{E} > 1$. D'après les égalités $r_1+r_2 \approx \frac{2k}{1-\overline{E}^2}$ et $r_1 r_2 \approx \frac{\overline{\mu}^2}{1-\overline{E}^2}$, on voit que l'un des deux nombres r_1 et r_2 doit être négatif. Les égalités : $r_1 \approx \frac{k+\sqrt{k^2-\overline{\mu}^2(1-\overline{E}^2)}}{1-\overline{E}^2}$ et $r_2 \approx \frac{k-\sqrt{k^2-\overline{\mu}^2(1-\overline{E}^2)}}{1-\overline{E}^2}$ montrent que c'est r_1 qui devient négatif (et, également, que la somme r_1+r_2 est négative). Ceci

nous pose un problème d'interprétation : le nombre r_1 (négatif) ne désigne plus l'aphélie (point de l'orbite qui est le plus éloigné du Soleil) ; d'ailleurs il n'y a plus d'aphélie ! Mais peu importe : ce nombre r_1 peut toujours être défini, d'une manière purement formelle, par l'égalité (approximative) $r_1 \approx \frac{k+\sqrt{k^2-\overline{\mu}^2(1-\overline{E}^2)}}{1-\overline{E}^2}$, ou, de manière plus rigoureuse, par les formules vues dans la section sur les orbites elliptiques. Ce qui est important, c'est le fait que tous les calculs faits dans cette section restent valables, y compris l'équation polaire à laquelle nous avions abouti :

$$r = \frac{p}{1 + e\ cos\ \theta}.$$

La seule chose qui va changer, c'est l'excentricité : $e = \frac{u_2-u_1}{u_2+u_1}$; en effet, on peut vérifier facilement que cette excentricité est supérieure à 1 (en remarquant que le nombre $u_1 + u_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1+r_2}{r_1.r_2}$ est positif) ; or, dans ce cas où l'excentricité est supérieure à 1, l'équation ci-dessus (avec $-Arccos\left(-\frac{1}{e}\right) < \theta < Arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$) est celle d'une branche d'hyperbole.

26 Précession du périhélie

Revenons aux orbites elliptiques ; nous avons dit que la métrique triviale de Ni permet de retrouver, en première approximation, les lois de Képler. Nous allons nous intéresser ici à l'écart par rapport aux lois de Képler. Nous allons voir que l'axe de l'orbite n'est pas stable, comme le croyaient Képler et Newton, mais tourne lentement. C'est ce qu'on appelle la précession du périhélie (ou du périastre).

Nous avons vu que $e = \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$, donc $e^2 = \frac{(r_1-r_2)^2}{(r_1+r_2)^2}$, et :

$$1 - e^2 = \frac{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}\ ;$$

$$a(1-e^2) = \frac{r_1+r_2}{2}\ \frac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2} = \frac{2}{\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}}\ ;$$

$$a(1-e^2) = \frac{2}{u_2+u_1} = p\ ;$$

$$\frac{u_1+u_2}{2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{a(1-e^2)}.$$

Reprenons l'équation : $d\theta \approx \left[1 + k\frac{3(u_1+u_2)}{2}\right]\, d\psi$, mais, cette fois-ci, au lieu de supprimer le terme $k\frac{3(u_1+u_2)}{2}$, remplaçons-le (selon la formule ci-dessus) par $\frac{3k}{a(1-e^2)}$. L'équation du mouvement devient :

$$d\theta \approx \left[1 + \frac{3k}{a(1-e^2)}\right]\, d\psi.$$

Le terme que nous avons réintroduit est responsable de la précession du périhélie. Sur un tour d'orbite (du périhélie au périhélie), la variation de ψ est : $\Delta\psi = 2\pi$; celle de θ est :

$$\Delta\theta = 2\pi\, \left[1 + \frac{3k}{a(1-e^2)}\right] = 2\pi + \frac{6\pi k}{a(1-e^2)} = 2\pi + \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}.$$

La précession du périhélie est donc, pour chaque tour d'orbite :

$$\frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}.$$

C'est précisément la formule à laquelle conduisent la relativité générale et la métrique de Schwarzschild.

Dans le cas de Mercure, on savait (depuis Le Verrier) que les perturbations dues aux autres planètes devaient produire une précession de 532" par siècle ; mais l'observation donnait 575" (soit 43" de trop). Cette différence de 43" par siècle a pu être expliquée grâce à la relativité générale. Le calcul a été fait par Einstein lui-même, qui a considéré ce résultat comme un test majeur de sa théorie. Une autre explication a été proposée, basée sur l'aplatissement (hypothétique) du Soleil ; mais des mesures récentes l'ont exclue : l'aplatissement est trop faible. D'autre part, la précession des autres planètes (beaucoup plus faible que celle de Mercure) a pu être mesurée, et la formule ci-dessus a été confirmée. Mais c'est surtout l'étude du pulsar binaire PSR 1913+16 qui a apporté une confirmation spectaculaire ; en effet, dans ce système double très serré, la précession du périastre est de $4,2^\circ$ par an, soit 41" par jour ; presque autant que la précession du périhélie de Mercure en un siècle ! D'autres pulsars binaires, actuellement en cours d'étude, confirment cette précession d'une manière encore plus précise.

27 Déflexion de la lumière

Dans cette partie, nous allons chercher à savoir comment un rayon lumineux est dévié lorsqu'il passe à proximité du Soleil (ou de tout autre corps massif). Cette déviation est liée au fait que les distances locales, par rapport à l'évaluation de l'observateur distant, sont de plus en plus importantes quand on se rapproche du Soleil, ce qui équivaut à une courbure de l'espace : en chaque point, les observateurs locaux voient passer la lumière en ligne droite, mais l'observateur distant va voir une ligne courbe.

Nous supposons qu'un rayon lumineux arrive de l'infini, passe à la distance r_0 du Soleil, et repart vers l'infini. L'angle polaire θ s'annule quand $r = r_0$. Dans un premier temps, nous n'étudierons qu'une demi-trajectoire (de $r = r_0$ à $r = \infty$). Nous partons des deux équations suivantes (voir la partie "géodésiques") :

$$a)\ ds^2 = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta^2\ ;$$

$$b)\ r^2 e^{\frac{4k}{r}} \frac{d\theta}{dt} = K.$$

Nous allons écrire que $ds^2 = 0$ (particularité des rayons lumineux), préciser la constante K, et éliminer dt pour exprimer $d\theta$ en fonction de dr.

Puisque $ds^2 = 0$, on tire de l'équation a) :

$$c^2 dt^2 = e^{\frac{4k}{r}} dr^2 + r^2 e^{\frac{4k}{r}} d\theta^2.$$

L'équation b) nous donne :

$$c^2 dt^2 = \frac{c^2 r^4 e^{\frac{8k}{r}} d\theta^2}{K^2}.$$

Les deux réunies conduisent à :

$$e^{\frac{4k}{r}} dr^2 = \frac{c^2 r^4 e^{\frac{8k}{r}} d\theta^2}{K^2} - r^2 e^{\frac{4k}{r}} d\theta^2\ ;$$

$$dr^2 = r^2 \left[\frac{c^2 r^2 e^{\frac{4k}{r}}}{K^2} - 1 \right] d\theta^2.$$

Pour $r = r_0$, dr s'annule, donc le crochet aussi, ce qui nous donne :

$$K = c r_0 e^{\frac{2k}{r_0}}.$$

Donc :

$$dr^2 = r^2 \left[\frac{r^2 e^{\frac{4k}{r}}}{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}} - 1 \right] d\theta^2.$$

Posons encore $u = \frac{1}{r}$; on a : $du^2 = \frac{dr^2}{r^4}$; donc :

$$du^2 = \left[\frac{e^{\frac{4k}{r}}}{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}} - \frac{1}{r^2} \right] d\theta^2 = \left[u_0^2 e^{4k(u-u_0)} - u^2 \right] d\theta^2 = e^{4ku} \left[u_0^2 e^{-4ku_0} - u^2 e^{-4ku} \right] d\theta^2 \ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 = \frac{e^{-4ku}}{u_0^2 e^{-4ku_0} - u^2 e^{-4ku}}.$$

A partir d'ici, nous allons supposer r suffisamment grand par rapport à k pour autoriser un développement limité à l'ordre un en ku. On écrit que $e^{-4ku} \approx 1 - 4ku$.

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1 - 4ku}{u_0^2(1 - 4ku_0) - u^2(1 - 4ku)} = \frac{1 - 4ku}{(u_0^2 - u^2) - 4k(u_0^3 - u^3)} \ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1 - 4ku}{(u_0^2 - u^2) \left(1 - 4k \frac{u_0^3 - u^3}{u_0^2 - u^2} \right)} \ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1 - 4ku}{(u_0^2 - u^2) \left(1 - 4k \frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right)} \ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)} (1 - 4ku) \left(1 + 4k \frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right) \ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)} \left[1 + 4k \left(\frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} - u \right) \right] \ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)} \left[1 + 4k \left(\frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} - \frac{u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right) \right] \ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)} \left(1 + 4k \frac{u_0^2}{u_0 + u} \right) \ ;$$

$$d\theta \approx \frac{\pm du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \left(1 + 2ku_0 \frac{1}{1 + \frac{u}{u_0}} \right) \ ;$$

$$d\theta \approx \frac{\pm d\left(\frac{u}{u_0}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{u_0}\right)^2}}\left(1+2ku_0\frac{1}{1+\frac{u}{u_0}}\right).$$

Posons : $\frac{u}{u_0} = cos\ \phi$. Notre équation devient :

$$d\theta \approx \frac{\pm d\left(cos\ \phi\right)}{\sqrt{1-\left(cos\ \phi\right)^2}}\left(1+2ku_0\frac{1}{1+cos\ \phi}\right) = \frac{\pm sin\ \phi\ d\phi}{sin\ \phi}\left(1+\frac{2ku_0}{1+cos\ \phi}\right).$$

Choisissons le signe + (simple convention sur le sens de déplacement).

$$d\theta \approx d\phi\ \ +2ku_0\frac{d\phi}{1+cos\ \phi}.$$

On sait que $cos\ \phi = 2cos^2\phi - 1$; donc $\frac{d\phi}{1+cos\ \phi} = \frac{d\frac{\phi}{2}}{cos^2\frac{\phi}{2}} = d\ tan\ \frac{\phi}{2}$.
Sur une demi-trajectoire du rayon lumineux, la variation de l'angle θ est donnée par :

$$\Delta\theta \approx \Delta\phi + 2ku_0\ \Delta\left(tan\ \frac{\phi}{2}\right).$$

Sur cette demi-trajectoire, r varie de r_0 à l'infini, u varie de u_0 à 0, $cos\ \phi$ varie de 1 à 0, ϕ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\phi}{2}$ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, $tan\ \frac{\phi}{2}$ varie de 0 à 1 ; donc :

$$\Delta\theta \approx \Delta\phi + 2ku_0\ \Delta\left(tan\ \frac{\phi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2ku_0,$$

et, sur la trajectoire complète :

$$\Delta\theta \approx \pi\ +\ 4ku_0 \approx \pi\ +\ \frac{4k}{r_0} =\approx \pi\ +\ \frac{4GM}{r_0c^2}.$$

La déflexion de la lumière est donnée par le terme :

$$\frac{4GM}{r_0c^2}.$$

C'est exactement la formule à laquelle conduit la relativité générale.
Elle a été confirmée par Eddington, par la mesure directe sur des étoiles occultées par le Soleil. Ces mesures, peu précises à l'époque, ont été affinées depuis, et sont maintenant vraiment convaincantes. D'autre part, les observations de mirages gravitationnels par les astronomes se sont multipliées, et la déviation de la lumière par les corps massifs ne fait plus de doute.

28 Effet Shapiro

Lorsqu'un rayon lumineux passe à proximité du Soleil (ou de tout autre corps massif), il semble prendre du retard par rapport à ce que prévoyaient les calculs classiques. Ce retard (appelé "retard Shapiro") est dû à la fois au fait la distance à parcourir est plus grande (les distances locales sont supérieures à l'évaluation de l'observateur distant), et au fait que le temps (local) s'écoule plus lentement. Ces deux raisons réunies entraînent que la vitesse apparente de la lumière (évaluée par l'observateur distant) est inférieure à c.

Pour étudier l'effet Shapiro, nous allons commencer, comme pour la déflexion de la lumière, avec les équations suivantes :

$$a)\ ds^2 = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta^2 = 0\ ;$$

$$b)\ r^2 e^{\frac{4k}{r}} \frac{d\theta}{dt} = K = c r_0 e^{\frac{2k}{r_0}}.$$

En effet, nous nous intéressons toujours à un rayon lumineux passant près du Soleil (à la distance r_0). Mais cette fois-ci, au lieu d'éliminer dt, nous allons éliminer $d\theta$, afin d'étudier le temps que met la lumière pour nous parvenir, en passant très près du Soleil.

L'idée originale de Shapiro est de mesurer le temps mis par un rayonnement électromagnétique pour faire l'aller-retour Terre-Mercure-Terre par exemple lorsque la planète est sur le point de passer derrière le Soleil. On s'aperçoit alors que la durée de cet aller-retour augmente brutalement juste avant l'occultation.

On va voir que cette variation est calculable avec nos équations, aussi bien qu'avec celle de Schwarzschild.

D'après b) :

$$d\theta = \frac{c\ r_0\ e^{\frac{2k}{r_0}}}{r^2\ e^{\frac{4k}{r}}} dt.$$

On fait la substitution dans a) :

$$c^2\ e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - r^2 e^{\frac{2k}{r}} \frac{c^2\ r_0^2\ e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^4\ e^{\frac{8k}{r}}} dt^2 = 0\ ;$$

$$c^2\ e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - \frac{c^2\ r_0^2\ e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^2\ e^{\frac{6k}{r}}} dt^2 = 0\ ;$$

$$c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}dt^2\left[1-\frac{r_0^2\ e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^2\ e^{\frac{4k}{r}}}\right]=e^{\frac{2k}{r}}dr^2\ ;$$

$$c^2\ dt^2=\frac{e^{\frac{4k}{r}}}{1-\frac{r_0^2\ e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^2\ e^{\frac{4k}{r}}}}dr^2=\frac{\frac{e^{\frac{4k}{r}}}{r_0^2\ e^{\frac{4k}{r_0}}}}{\frac{1}{r_0^2\ e^{\frac{4k}{r_0}}}-\frac{1}{r^2\ e^{\frac{4k}{r}}}}dr^2=\frac{u_0^2\ e^{4k(u-u_0)}}{u_0^2\ e^{-4ku_0}-u^2\ e^{-4ku}}dr^2.$$

Nous supposons que k est petit par rapport à r (donc ku et ku_0 très petits aussi), et nous développons les exponentielles à l'ordre un en k :

$$c^2dt^2\approx\frac{u_0^2\left[1+4k(u-u_0)\right]}{u_0^2(1-4ku_0)-u^2(1-4ku)}dr^2=\frac{u_0^2\left[1+4k(u-u_0)\right]}{(u_0^2-u^2)-4k(u_0^3-u^3)}dr^2\ ;$$

$$c^2dt^2\approx\frac{u_0^2\left[1+4k(u-u_0)\right]}{(u_0^2-u^2)\left[1-4k\frac{u_0^3-u^3}{u_0^2-u^2}\right]}dr^2=\frac{u_0^2\left[1+4k(u-u_0)\right]}{(u_0^2-u^2)\left[1-4k\frac{u_0^2+u_0u+u^2}{u_0+u}\right]}dr^2\ ;$$

$$c^2dt^2\approx\frac{u_0^2\left[1+4k(u-u_0)\right]\left[1+4k\frac{u_0^2+u_0u+u^2}{u_0+u}\right]}{(u_0^2-u^2)}dr^2\ ;$$

$$c^2dt^2\approx\frac{u_0^2}{(u_0^2-u^2)}\left[1+4k(u-u_0)+4k\frac{u_0^2+u_0u+u^2}{u_0+u}\right]dr^2\ ;$$

$$c^2dt^2\approx\frac{u_0^2}{(u_0^2-u^2)}\left[1+4k\frac{u^2-u_0^2}{u_0+u}+4k\frac{u_0^2+u_0u+u^2}{u_0+u}\right]dr^2\ ;$$

$$c^2dt^2\approx\frac{u_0^2}{(u_0^2-u^2)}\left[1+4k\frac{u_0u+u^2}{u_0+u}+4k\frac{u^2}{u_0+u}\right]dr^2\ ;$$

$$cdt\approx\frac{u_0}{\sqrt{u_0^2-u^2}}\left[1+2ku+2k\frac{u^2}{u_0+u}\right]dr.$$

Nous allons passer maintenant à l'intégration, que nous allons fractionner en trois parties :
$A=\frac{u_0\ dr}{\sqrt{u_0^2-u^2}}$, $B=2k\frac{u^2}{u_0+u}\ \frac{u_0\ dr}{\sqrt{u_0^2-u^2}}$, et $C=2ku\frac{u_0\ dr}{\sqrt{u_0^2-u^2}}$.
On posera : $\frac{u}{u_0}=cos\ \phi$.

$$A=\frac{u_0\ dr}{\sqrt{u_0^2-u^2}}=-\frac{du}{u^2\sqrt{1-\left(\frac{u}{u_0}\right)^2}}=\frac{u_0\ sin\ \phi\ d\phi}{u_0^2\ cos^2\phi\ \sqrt{1-cos^2\phi}}\ ;$$

$$A=\frac{sin\ \phi\ d\phi}{u_0\ cos^2\phi\ sin\ phi}=\frac{d\phi}{u_0\ cos^2\phi}=r_0\frac{d\phi}{cos^2\phi}=r_0\ d(tan\ \phi).$$

Remarquons que $cos\ \phi = \frac{u}{u_0} = \frac{r_0}{r}$, $sin\ \phi = \sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}$, $tan\ \phi = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}}{\frac{r_0}{r}} = \frac{\sqrt{r^2-r_0^2}}{r_0}$. On a donc :

$$A = r_0\ d(tan\ \phi) = d\left(\sqrt{r^2-r_0^2}\right).$$

Si on néglige les termes B et C, on trouve donc que le temps nécessaire au rayon lumineux pour aller de r_0 (point de sa trajectoire le plus proche du Soleil) à r (ou inversement) est : $\Delta t \approx \frac{\sqrt{r^2-r_0^2}}{c}$, ce qui correspond exactement au résultat qu'on obtiendrait dans un espace-temps euclidien (car $\sqrt{r^2-r_0^2}$ correspond alors à la distance parcourue, calculée par le théorème de Pythagore classique). Mais dans notre espace-temps courbe, la distance va être plus grande, et le temps de parcours aussi : les termes B et C vont nous le montrer.

$$B = 2k\frac{u^2}{u_0+u}\ \frac{u_0\ dr}{\sqrt{u_0^2-u^2}} = 2k\frac{u^2}{u_0+u}\ \frac{u_0\ \left(-\frac{du}{u^2}\right)}{\sqrt{u_0^2-u^2}} = 2k\ \frac{1}{u_0+u}\ \frac{-du}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{u_0}\right)^2}}\ ;$$

$$B = 2k\ \frac{1}{u_0(1+cos\ \phi)}\ \frac{u_0\ sin\ \phi\ d\phi}{sin\ \phi} = 2k\ \frac{d\phi}{1+cos\ \phi}.$$

Comme $cos\ \phi = 2cos^2\ \frac{\phi}{2} - 1$, on a : $\frac{d\phi}{1+cos\ \phi} = \frac{2d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{2cos^2\ \frac{\phi}{2}} = d\left(tan\ \frac{\phi}{2}\right)$, on obtient :

$$B = 2k\ d\left(tan\ \frac{\phi}{2}\right).$$

Mais on sait que $tan\ \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\ \phi}{1+cos\ \phi}}$, et que $cos\ \phi = \frac{r_0}{r}$, donc :

$$B = 2k\ d\left(tan\ \frac{\phi}{2}\right) = 2k\ \sqrt{\frac{1-cos\ \phi}{1+cos\ \phi}} = 2k\ \sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}}} = 2k\ \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}.$$

Au temps de parcours de la lumière, de r_0 à r (ou inversement), nous devons donc ajouter un correctif égal à $\frac{2k}{c}\ \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}$; ce correctif est compris

entre 0 et $\frac{2k}{c}$: il est proche de $\frac{2k}{c} = \frac{2GM}{c^3}$ quand r est grand par rapport à r_0.

Etudions maintenant le troisième terme (C) :

$$C = 2ku\frac{u_0\ dr}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = 2k\frac{u\ \left(-\frac{du}{u^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{u_0}\right)^2}} = 2k\frac{-du}{u\ \sqrt{1-\left(\frac{u}{u_0}\right)^2}}\ ;$$

$$C = 2k\ \frac{u_0\ sin\ \phi\ d\phi}{u_0\ cos\ \phi\ sin\ \phi} = 2k\ \frac{d\phi}{cos\ \phi}.$$

On sait que $\frac{d\phi}{cos\ \phi} = dLog\left|tan\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; de plus :

$tan\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tan\ \frac{\phi}{2}+tan\ \frac{\pi}{4}}{1-tan\ \frac{\phi}{2}\ tan\ \frac{\pi}{4}} = \frac{1+tan\ \frac{\phi}{2}}{1-tan\ \frac{\phi}{2}} = \frac{1+\sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}}{1-\sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}} = \frac{\sqrt{r+r_0}+\sqrt{r-r_0}}{\sqrt{r+r_0}-\sqrt{r-r_0}}$;

$tan\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\sqrt{r+r_0}+\sqrt{r-r_0}\right)^2}{(r+r_0)-(r-r_0)} = \frac{r+r_0+2\sqrt{(r+r_0)(r-r_0)}+r-r_0}{2r_0} = \frac{r+\sqrt{r^2-r_0^2}}{r_0}$;

$tan\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{r}{r_0}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}\right)$, donc :

$$C = 2k\ d\left[Log\left(\frac{r}{r_0}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}\right)\right)\right].$$

Pour $r = r_0$, le crochet s'annule ; pour r très grand par rapport à r_0, il est voisin de $2\frac{r}{r_0}$. Donc au temps de parcours de la lumière entre r_0 à r $(r >> r_0)$, nous devons ajouter un nouveau correctif proche de $\frac{2k}{c}\ Log\left(2\frac{r}{r_0}\right)$.
C'est ce terme correctif C qui est "l'effet Shapiro principal", et je réserverai le nom d'"effet Shapiro secondaire" au terme B.

En pratique, l'effet Shapiro se mesure de la façon suivante : au moment ou une sonde spatiale, ou une planète (par exemple Mercure), va être occultée par le Soleil, on envoie un faisceau radar vers la cible, et on mesure le temps d'aller-retour. Notons par exemple r_m la distance de Mercure au Soleil, et r_t la distance de la Terre au Soleil ; au moment de l'occultation, on a : $r_0 = r_s$ (rayon du Soleil). Le parcours de la lumière se décompose en quatre parties : Terre-Soleil, Soleil-Mercure, Mercure-Soleil, Soleil-Terre ; donc l'anomalie du temps de parcours doit être :

$$\frac{4k}{c}\ Log\left(2\frac{r_t}{r_s}\right) + \frac{4k}{c}\ Log\left(2\frac{r_m}{r_s}\right) = \frac{4k}{c}\ Log\left(4\frac{r_t\ r_m}{r_s^2}\right) = \frac{4GM}{c^3}\ Log\left(4\frac{r_t\ r_m}{r_s^2}\right)$$

(où M est la masse du Soleil).
Pour l'effet Shapiro secondaire, on obtient : $4.\frac{2GM}{c^3} = \frac{8GM}{c^3}$.
En regroupant les effets Shapiro principal et secondaire, on trouve un retard de l'écho radar de l'ordre de :

$$\Delta T = \frac{4GM}{c^3} \left[Log\left(4\frac{r_t\, r_m}{r_s^2}\right) + 2\right].$$

Cette formule est la même qu'en relativité générale.
On peut, bien sûr, remplacer Mercure par une sonde spatiale ; c'est ainsi que l'effet Shapiro a pu être vérifié avec une bonne précision, en 1975, par la sonde Viking. Mais c'est aujourd'hui l'étude des pulsars binaires qui fournit la confirmation la plus précise (et de loin).

Remarquons une chose étrange : si nous faisons tendre r_s vers 0 dans la formule ci-dessus, il est clair que ΔT tend vers l'infini. Ceci signifie que, si nous remplaçons le Soleil par une particule de rayon nul et de masse non nulle, le temps mis par la lumière pour nous en parvenir sera infini. On peut se demander si cette "absurdité" vient du fait que nous avons fait des approximations dans notre calcul ; mais ce n'est pas le cas ! Ceci est vrai, d'ailleurs, aussi bien en relativité générale que dans le modèle proposé ici.

Examinons cette curiosité d'un peu plus près. Considérons une sphère de rayon r, au centre de laquelle se trouve une masse M ponctuelle. Rappelons que r est le rayon estimé par l'observateur distant. Pour celui-ci, l'aire de cette sphère est : $4\pi r^2$; pour des observateurs locaux (situés sur la sphère) les distances élémentaires sont multipliées par le coefficient $e^{\frac{k}{r}} = e^{\frac{GM}{rc^2}} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$, donc l'aire élémentaire est multipliée par le carré de ce coefficient. L'aire totale (obtenue en sommant les mesures locales des observateurs locaux) est donc : $A = 4\pi r^2\, e^{\frac{2GM}{rc^2}}$. Evaluons maintenant le volume infinitésimal compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$; pour l'observateur local, la différence des rayons n'est pas dr, mais $e^{\frac{GM}{rc^2}}\, dr$; donc le volume infinitésimal est : $dV = 4\pi r^2\, e^{\frac{2GM}{rc^2}}\, e^{\frac{GM}{rc^2}}\, dr = 4\pi r^2\, e^{\frac{3GM}{rc^2}}\, dr$. Mais on s'aperçoit que la quantité $r^2\, e^{\frac{3GM}{rc^2}} = r^2\, e^{-\frac{3\Phi}{c^2}}$ tend vers l'infini quand r tend vers 0 ! Ceci signifie que l'aire d'une sphère (évaluée en sommant les observations locales) ayant en son centre une particule massive ponctuelle tend vers l'infini quand son rayon tend vers 0 ! Ceci serait extrêmement troublant... si les particules massives et ponctuelles existaient ! Mais tout nous porte à croire que les densités

infinies n'existent pas...

29 La "création d'espace"

Comme nous venons de le voir, l'effet Shapiro permet de prendre sur le fait un phénomène très curieux : lorsque la lumière passe à proximité d'un corps massif, elle a un excédent de distance à parcourir, comme si la présence de matière produisait une dilatation de l'espace dans son voisinage.

Bien entendu, au lieu de dire que l'espace se dilate (c'est le point de vue de l'observateur local), on pourrait dire que les objets qu'il contient rétrécissent (c'est le point de vue de l'observateur distant). Ces deux points de vue sont complémentaires.

Ce phénomème que j'appelle "création d'espace" n'est pas un rêve : il existe bel et bien, et a été vérifié avec une grande précision, en particulier grâce à l'étude des pulsars binaires. C'est l'extrapolation à des corps beaucoup plus compacts qui reste à étudier : dans ce cas, la métrique de Ni et celle de Schwarzschild divergent, ce qui a de profondes répercussions sur la conception des trous noirs ou du big bang, par exemple.

30 Systèmes binaires : modèle newtonien

Ici commence l'étude des systèmes binaires (plus particulièrement des pulsars binaires), systèmes qui constituent d'extraordinaires laboratoires où sont testées avec une précision inégalée les différentes théories de la gravitation. Nous nous contenterons, dans cette section, de rappeler quelques généralités classiques, établies par Newton.

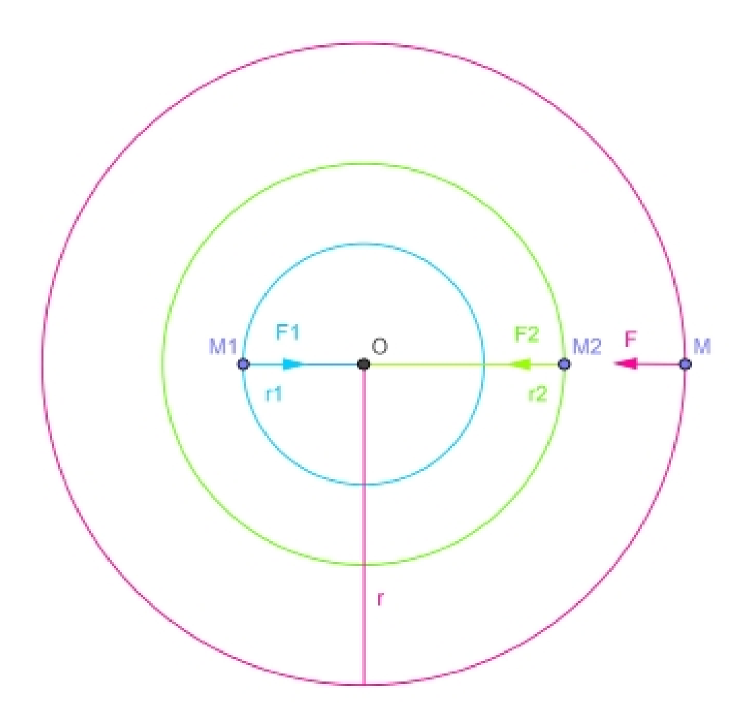
Un système binaire est formé de deux corps célestes tournant autour de leur centre de gravité commun. Ce système peut être composé de deux étoiles quelconques (étoile double), d'un pulsar et d'une autre étoile (pulsar binaire), de deux pulsars (pulsar double)...

Nous considèrerons deux étoiles M_1 et M_2, de masses m_1 et m_2, liées gravitationnellement (et supposées isolées dans l'espace).

La première idée de Newton est de se placer dans un repère lié à leur centre de gravité O. Ce point, situé sur la droite (M_1M_2), est tel que $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{m_2}{m_1}$, ou, en posant $r_1 = OM_1$ et $r_2 = OM_2$: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

De plus, si on note $\vec{v}_O$ la vitesse de O, $\vec{v}_1$ celle de M_1, $\vec{v}_2$ celle de M_2, alors : $(m_1 + m_2).\vec{v}_O = m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2$; puisque nous avons choisi un repère lié à O, nous aurons : $\vec{v}_O = \vec{0}$, donc $m_1.\vec{v}_1 = -m_2.\vec{v}_2$.

Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont donc parallèles, de sens contraire, et leurs modules v_1 et v_2 vérifient : $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2}$.



Notons $\vec{F_1}$ la force gravitationnelle exercée par M_2 sur M_1, et $\vec{F_2}$ la force gravitationnelle exercée par M_1 sur M_2 ; ces forces sont parallèles, de sens contraire, et de même module : $F_1 = F_2 = \frac{G.m_1.m_2}{(r_1+r_2)^2}$; elles transmettent aux deux mobiles les accélérations $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ (parallèles et de sens contraire), qui ont pour modules : $\gamma_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{G.m_2}{(r_1+r_2)^2}$ et $\gamma_2 = \frac{F_2}{m_2} = \frac{G.m_1}{(r_1+r_2)^2}$.

On en déduit que $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m_2}{m_1}$, et, par suite : $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Ceci suffit à prouver que les trajectoires des deux mobiles sont homothétiques ; le centre de l'homothétie est O, et son rapport est $-\frac{m_2}{m_1} = -\frac{r_1}{r_2}$ (ou

$-\frac{m_1}{m_2} = -\frac{r_2}{r_1}$).

Si nous posons $r = r_1 + r_2$ et $m = m_1 + m_2$, il est facile de vérifier que $\frac{r_1}{r} = \frac{m_2}{m}$ et que $\frac{r_2}{r} = \frac{m_1}{m}$. En effet :

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{1}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{m_2}{m_2 + m_1} = \frac{m_2}{m}.$$

La seconde idée de Newton est d'imaginer un troisième mobile (fictif) M (de masse quelconque), situé par exemple sur la demi-droite $[OM_2)$, tel que $OM = r_1 + r_2 = r$, et se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (de module : $v = v_1 + v_2$). Nous voulons que la trajectoire de M soit homothétique aux deux précédentes ; pour cela, il faut que l'accélération de M soit : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1$, ou, plus simplement, de module :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{G.m_2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{G.m_1}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{G.(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{G.m}{r^2}.$$

Ce mobile fictif va donc se déplacer exactement comme s'il subissait l'attraction d'une masse $m = m_1 + m_2$ immobile, située au point O. Or il est facile d'étudier la trajectoire de ce mobile, sur le modèle du système solaire (car seule l'attraction du corps central immobile est prise en compte) ; ensuite, les trajectoires de M_1 et M_2 se déduisent de la précédente par deux homothéties de rapports : $\pm\frac{r_1}{r} = \pm\frac{m_2}{m}$ et $\pm\frac{r_2}{r} = \pm\frac{m_1}{m}$.

Calculons les énergies cinétiques (newtoniennes) E_{c1} et E_{c2} des deux étoiles :

$$E_{c1} = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 = \frac{1}{2}.m_1.\left(\frac{m_2}{m}.v\right)^2 = \frac{1}{2}.m_1.\frac{m_2^2}{m^2}.v^2 = \frac{1}{2}.\frac{m_2}{m}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2 \ ;$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2}.m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}.m_2.\left(\frac{m_1}{m}.v\right)^2 = \frac{1}{2}.m_2.\frac{m_1^2}{m^2}.v^2 = \frac{1}{2}.\frac{m_1}{m}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2.$$

Notons E_c l'énergie cinétique totale du système :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}.\frac{m_2}{m}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2 + \frac{1}{2}.\frac{m_1}{m}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2 \ ;$$

$$E_c = \frac{1}{2}.\left(\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m}\right).\frac{m_1.m_2}{m}.v^2 = \frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2.$$

On pourra considérer que c'est l'énergie cinétique du mobile fictif, à condition de lui attribuer une masse fictive : $m' = \frac{m_1.m_2}{m}$ (appelée : masse réduite). C'est ce que nous ferons : nous admettrons que le mobile fictif a pour masse

$m' = \frac{m_1.m_2}{m} = \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}$ (vérifiant donc : $\frac{1}{m'} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$), et subit l'attraction d'un corps immobile de masse $m = m_1 + m_2$, situé au point O.

On aura remarqué que $E_{c1} = \frac{m_2}{m}.E_c$ et que $E_{c2} = \frac{m_1}{m}.E_c$.

Calculons les énergies potentielles E_{p1} et E_{p2} des deux étoiles :

$$E_{p1} = \int_{r_1}^{\infty} -F_1.dx = \int_{r_1}^{\infty} -\frac{G.m_1.m_2}{r^2}.dx,$$

où dx représente un déplacement élémentaire de l'étoile M_1 sur l'axe (OM_1) : $x = OM_1 = \frac{m_2}{m}.M_1M_2 = \frac{m_2}{m}.r$. Nous faisons varier x de r_1 à l'infini (où l'énergie potentielle est censée s'annuler).

$$E_{p1} = \int_{r_1}^{\infty} -F_1.dx = -\int_{r_1}^{\infty} \frac{G.m_1.m_2}{\left(\frac{m}{m_2}.x\right)^2}.dx = -\int_{r_1}^{\infty} \frac{m_2^2}{m^2}.\frac{G.m_1.m_2}{x^2}.dx \ ;$$

$$E_{p1} = -\frac{m_2^2}{m^2}.G.m_1.m_2.\int_{r_1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{m_2^2}{m^2}.G.m_1.m_2.\left[-\frac{1}{x}\right]_{r_1}^{\infty} = -\frac{m_2^2}{m^2}.G.m_1.m_2.\frac{1}{r_1} \ ;$$

$$E_{p1} = -\frac{m_2^2}{m^2}.G.m_1.m_2.\frac{1}{\frac{m_2}{m}.r} = -\frac{m_2}{m}.\frac{G.m_1.m_2}{r}.$$

De même, pour la seconde étoile :

$$E_{p2} = -\frac{m_1}{m}.\frac{G.m_1.m_2}{r}.$$

Pour le mobile fictif, le calcul est plus facile (et nous ramène à notre étude préliminaire) :

$$E_p = -\frac{G.m.m'}{r} = -\frac{G.m.\frac{m_1.m_2}{m}}{r} = -\frac{G.m_1.m_2}{r}.$$

Comme on le voit, $E_p = E_{p1} + E_{p2}$; de plus : $E_{p1} = \frac{m_2}{m}.E_p$ et $E_{p2} = \frac{m_1}{m}.E_p$.

Si on le désire, on peut poser : $G_1 = \frac{m_2}{m}.G$ et $G_2 = \frac{m_1}{m}.G$. On a alors : $G_1 + G_2 = G$, $E_{p1} = -\frac{G_1.m_1.m_2}{r}$, $E_{p2} = -\frac{G_2.m_1.m_2}{r}$, $E_p = -\frac{G.m_1.m_2}{r}$.

Calculons les moments cinétiques μ_1 et μ_2 des deux étoiles par rapport au point O ; nous notons α l'angle formé par le vecteur vitesse $\vec{v}$ avec la normale au rayon vecteur $\vec{r}$:

$$\mu_1 = m_1.v_1.r_1.cos\alpha = m_1.\frac{m_2}{m}.v.\frac{m_2}{m}.r.cos\alpha = \frac{m_2}{m}.\frac{m_1.m_2}{m}.v.r.cos\alpha \ ;$$

$$\mu_1 = \frac{m_2}{m}.m'.v.r.cos\alpha.$$

De même :

$$\mu_2 = \frac{m_1}{m}.m'.v.r.cos\alpha.$$

Bien sûr, le moment cinétique du mobile fictif est :

$$\mu = m'.v.r.cos\alpha.$$

On voit que $\mu = \mu_1 + \mu_2$; de plus : $\mu_1 = \frac{m_2}{m}.\mu$ et $\mu_2 = \frac{m_1}{m}.\mu$.

La troisième loi de Kepler : $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm}$, appliquée au mobile fictif M (masse centrale : $m = m_1 + m_2$, demi-grand-axe de l'orbite : $a = a_1 + a_2$) permet en principe de calculer m connaissant a. En pratique, l'étude spectrale permet souvent de connaître la variation des vitesses radiales des deux étoiles, donc, en intégrant, la variation de leurs distances par rapport à l'observateur. On peut en déduire le quotient $\frac{m_1}{m_2}$, mais il faudrait connaître l'angle i (inclinaison de l'axe de l'orbite par rapport à la ligne de visée) pour en déduire la valeur de a_1 et de a_2 de manière certaine. Cet angle i est généralement mal connu ; les binaires à éclipses font exception : dans ce cas, on a $i = 90^\circ$, ce qui permet de calculer a et m avec précision ; connaissant $\frac{m_1}{m_2}$ et $m_1 + m_2$, on a alors accès aux masses individuelles des deux étoiles.

Dans le cas des pulsars binaires, l'une des deux étoiles est une étoile à neutrons visible comme pulsar, c'est-à-dire qu'elle émet un faisceau de lumière qui vient balayer la Terre à chaque tour de l'étoile sur son axe. Ces pulsations, d'une très grande régularité, peuvent être exploitées pour obtenir un grand nombre d'informations encore plus pointues, et pour tester la relativité générale et les autres théories de la gravitation.

Remarquons que, dans ces calculs, r_1 et r_2 peuvent être constants (orbites circulaires) ou variables (orbites elliptiques).

Examinons d'un peu plus près le cas particulier des orbites circulaires (en utilisant toujours les idées de Newton, dans un cadre non relativiste). Commençons par le mobile fictif. On vient de voir que son accélération est : $\gamma = \frac{G.m}{r^2}$; on sait que, dans la cas d'un mouvement circulaire uniforme : $\gamma = \frac{v_c^2}{r}$. On en déduit que $v_c^2 = \gamma.r = \frac{G.m}{r^2}.r = \frac{G.m}{r}$, donc la vitesse circulaire est :

$$v_c = \sqrt{\frac{G.m}{r}}.$$

Nous en déduisons les vitesses circulaires individuelles des deux étoiles par homothétie :

$$v_{c1} = \frac{r_1}{r}.v_c = \frac{m_2}{m}.v_c = \frac{m_2}{m}.\sqrt{\frac{G.m}{r}} \ ;$$

$$v_{c2} = \frac{r_2}{r}.v_c = \frac{m_1}{m}.v_c = \frac{m_1}{m}.\sqrt{\frac{G.m}{r}}.$$

Remarquons que, dans le cas des orbites circulaires, l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}.m'.v_c^2 = \frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.\frac{G.m}{r} = \frac{1}{2}.\frac{G.m_1.m_2}{r} = \frac{1}{2}.|E_p|.$$

Après la vitesse circulaire, calculons la vitesse de libération. On doit avoir :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.v_l^2 - \frac{G.m_1.m_2}{r} = 0 \ \ (\text{donc } E_c = |E_p|) \ ;$$

$$v_l^2 = \frac{2.m}{m_1.m_2}.\frac{G.m_1.m_2}{r} = 2.\frac{G.m}{r} \ ;$$

$$v_l = \sqrt{2.\frac{G.m}{r}} \ ;$$

$$v_{l1} = \frac{m_2}{m}.\sqrt{2.\frac{G.m}{r}} \ ;$$

$$v_{l2} = \frac{m_1}{m}.\sqrt{2.\frac{G.m}{r}}.$$

Nous admettrons que ces conclusions (non relativistes) sont valables lorsque les vitesses des deux étoiles sont faibles par rapport à c. C'est bien le cas pour les pulsars binaires ; nous les étudierons donc en nous appuyant sur cette approximation newtonienne.

Cependant, dans certaines situations, il pourrait être nécessaire d'utiliser une version relativiste des idées de Newton.

31 Vers un modèle relativiste des systèmes binaires

Si nous désirons construire un modèle relativiste de système binaire, il peut sembler tentant de transposer tout simplement les équations que nous avons utilisées jusqu'ici, et qui nous ont donné satisfaction dans l'étude du système solaire ; ce qui nous donne, en traitant séparément les deux étoiles :

$$\begin{cases} E_1 = m_1.c^2.ch\frac{w_1}{c}.e^{-\frac{G.m_2}{r.c^2}} \ ; \\ \\ \mu_1 = m_1.c.sh\frac{w_1}{c}.e^{\frac{G.m_2}{r.c^2}}.r_1.cos\alpha \ ; \end{cases}$$
$$\begin{cases} E_2 = m_2.c^2.ch\frac{w_2}{c}.e^{-\frac{G.m_1}{r.c^2}} \ ; \\ \\ \mu_2 = m_2.c.sh\frac{w_2}{c}.e^{\frac{G.m_1}{r.c^2}}.r_2.cos\alpha. \end{cases}$$

Mais ceci ne peut pas nous satisfaire, pour plusieurs raisons. En voici une : nous allons développer l'équation donnant l'énergie E_1, pour la comparer au modèle de Newton.

$$E_1 = m_1.c^2.ch\frac{w_1}{c}.e^{-\frac{G.m_2}{r.c^2}} \approx m_1.c^2.\left(1+\frac{1}{2}.\frac{v_1^2}{c^2}\right).\left(1-\frac{G.m_2}{r.c^2}\right) \ ;$$
$$E_1 \approx m_1.c^2.\left(1+\frac{1}{2}.\frac{v_1^2}{c^2}-\frac{G.m_2}{r.c^2}\right) \approx m_1.c^2+\frac{1}{2}.m_1.v_1^2-\frac{G.m_1.m_2}{r}.$$

Cette énergie E_1 se décompose en trois termes : l'énergie de masse $m_1.c^2$, l'énergie cinétique newtonienne $\frac{1}{2}.m_1.v_1^2$, et l'énergie potentielle $-\frac{G.m_1.m_2}{r}$. Le problème est que cette énergie potentielle est celle du système entier ; celle de la première étoile devrait être, selon Newton : $-\frac{m_2}{m}.\frac{G.m_1.m_2}{r}$.

Nous allons donc essayer de traiter le problème globalement, à la manière de Newton, sans séparer les deux étoiles. Je propose de partir de l'idée suivante : comme on le sait, la masse au repos d'un système n'est pas égale à la somme des masses au repos de ses constituants. En relativité restreinte, la masse au repos totale m_t d'un système de deux corps ponctuels de masses au repos m_1 et m_2, animés d'une rapidité relative Δw, est donnée par la formule : $m_t^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch\frac{\Delta w}{c}$. On pourra trouver la démonstration

sur la page : Les vitesses en Relativité restreinte.pdf, section sur la masse maupertuisienne.

Cette formule doit impérativement être adaptée au contexte gravitationnel. Comment ? Je suggère la solution suivante, qui est particulièrement simple, mais que je ne suis pas en mesure de justifier de manière rigoureuse :

$$m_t^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.$$

Bien sûr, m désigne la somme des masses : $m = m_1 + m_2$, et w (ou Δw) la rapidité différentielle : $\vec{w} = \vec{w_2} - \vec{w_1}$, donc $w = w_1 + w_2$ (si les vitesses sont parallèles et de sens contraire, ce qui est le cas lorsqu'on se réfère à un repère lié au centre de gravité).

Vérifions la cohérence de cette formule, d'une part avec celles de Newton, d'autre part avec celles que nous avons utilisées dans l'étude du système solaire.

$$m_t^2 \approx m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2}\right).\left(1 - \frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$m_t^2 \approx m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2} - \frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$m_t^2 \approx m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2 + \frac{2.m}{c^2}.\left(\frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2 - \frac{G.m_1.m_2}{r}\right) \ ;$$

$$m_t^2 \approx m^2 + \frac{2.m}{c^2}.\left(\frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2 - \frac{G.m_1.m_2}{r}\right).$$

La quantité qui figure entre parenthèses correspond à l'énergie newtonienne totale du système : $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.v^2 - \frac{G.m_1.m_2}{r}$. Si on admet que m_1 et m_2 (donc aussi m) sont des constantes, alors la conservation de la masse totale m_t équivaut à la conservation de l'énergie newtonienne E. On peut penser que la conservation de l'énergie et la conservation de la masse au repos sont deux aspects d'une seule et même loi. Pour l'observateur distant, la masse globale du système reste constante, quels que soient les événements qui se déroulent à l'intérieur de celui-ci (variations de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle des deux étoiles).

Les formules de Newton seraient donc une approximation des formules relativistes.

En ce qui concerne les moments cinétiques, les formules

$$\mu_1 = m_1.c.sh\frac{w_1}{c}.e^{\frac{G.m_2}{r.c^2}}.r_1.cos\alpha \approx m_1.v_1.r_1.cos\alpha \text{ et}$$

$$\mu_2 = m_2.c.sh\frac{w_2}{c}.e^{\frac{G.m_1}{r.c^2}}.r_2.cos\alpha \approx m_2.v_2.r_2.cos\alpha$$

nous conviennent, en première approximation (en admettant que $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$). Ici, la parenté entre les formules newtoniennes et relativistes est évidente.

Supposons maintenant que la première étoile soit le Soleil ($m_1 = M$), supposé immobile ($w_1 = 0$), et remplaçons la seconde étoile par une planète ($m_2 << M$).

$$m_t^2 = M^2 + m_2^2 + 2.M.m_2.e^{-\frac{G.(M+m_2)}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}\ ;$$

$$\frac{m_t^2}{M^2} = 1 + \frac{m_2^2}{M^2} + 2.\frac{m_2}{M}.e^{-\left(\frac{G.M}{r.c^2}+\frac{G.M}{r.c^2}.\frac{m_2}{M}\right)}.ch\frac{w_2}{c}.$$

Compte-tenu du fait que les quantités $\frac{m_2}{M}$ et $\frac{G.M}{r.c^2} = \frac{k}{r}$ sont "petites", nous négligerons leurs produits (et leurs carrés). Il vient :

$$\frac{m_t^2}{M^2} \approx 1 + 2.\frac{m_2}{M}.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}\ ;$$

$$\frac{m_t}{M} \approx \sqrt{1 + 2.\frac{m_2}{M}.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}} \approx 1 + \frac{m_2}{M}.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}\ ;$$

$$m_t.c^2 \approx M.c^2 + m_2.c^2.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}.$$

Pour que la masse totale m_t soit constante, il est donc nécessaire que la quantité $m_2.c^2.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}$ le soit aussi : c'est la formule de conservation de l'énergie que nous avons utilisée dans notre étude du système solaire.

Les formules que nous avons utilisées dans la première partie de ce travail seraient donc une adaptation, dans un cas particulier, de formules relativistes plus générales. Dans le cas des systèmes doubles, sera-t-il possible d'assurer simultanément la conservation des masses individuelles m_1 et m_2, de la masse totale m_t, et de l'énergie réduite $\overline{E} = e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.ch\frac{w}{c}$? Evidemment non ! Il faudra préciser ce que signifie la "conservation de l'énergie". Je propose donc ici (mais ce n'est qu'une hypothèse...) de l'identifier à la conservation de la masse au repos totale (m_t). Cette option est compatible avec le modèle newtonien, que nous allons utiliser (car il s'agit d'une approximation satisfaisante pour traiter la plupart des problèmes concernant les pulsars binaires, qui vérifient

toujours : $v << c$). Ce modèle pourra se révéler insuffisant dans les situations faisant intervenir la vitesse de propagation de la gravité.

Ouvrons ici une courte parenthèse, qui est en rapport avec des sujets qui seront abordés dans la section sur les trous noirs. La dernière égalité que nous avons obtenue peut s'écrire (en admettant toujours que $m_2 << M$ et $w_1 = 0$) :

$$\frac{m_t}{M} \approx \sqrt{1 + \frac{2}{M.c^2}.m_2.c^2.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}} \approx 1 + \frac{1}{M}.m_2.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c} \ ;$$

$$m_t \approx M + m_2.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.ch\frac{w_2}{c}.$$

Si $w_2 = 0$, on obtient :

$$m_t \approx M + m_2.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.$$

Il s'agit là d'une curieuse règle de composition des masses au repos, qui nous renvoie à ce qui a été dit dans la section sur l'évaluation des masses. Nous en reparlerons...

Nous voyons donc que les idées de Newton sur les systèmes doubles sont compatibles avec celles que nous avons développées jusqu'à présent : il est possible d'en construire une synthèse cohérente. Cependant, les pistes que j'ai proposées ici ne sont que des hypothèses de travail, qui doivent être discutées, et qui seront peut-être rejetées. Aussi, dans la suite de notre travail, nous nous efforcerons d'oublier (provisoirement ?) cette section.

Parmi les améliorations nécessaires, on peut remarquer que la recherche du centre de gravité ne doit plus s'appuyer sur l'égalité : $m_1.\vec{v}_1 = -m_2.\vec{v}_2$, mais plutôt sur : $m_1.sh\frac{\vec{w_1}}{c}.e^{\frac{G.m_2}{r.c^2}} = -m_2.sh\frac{\vec{w_2}}{c}.e^{\frac{G.m_1}{r.c^2}}$, ce qui modifie très légèrement le coefficient de proportionnalité entre les deux orbites.

Enfin, pour être rigoureux, il faudrait savoir si les messages gravitationnels se transmettent instantanément, comme nous l'avons supposé jusqu'ici (à la manière de Newton), ou à vitesse finie. Nous aurons l'occasion d'en reparler.

32 Précession du périastre des pulsars binaires

La précession du périastre existe en principe dans tous les systèmes binaires, mais c'est dans le cas des pulsars binaires qu'elle prend des proportions

particulièrement remarquables, ce qui permet de la mesurer assez facilement. Ceci vient du fait que ces pulsars binaires forment des couples très serrés, qui tournent très vite.

Dans la section sur la précession, nous avons vu la formule qui donne l'angle de précession (pour un tour d'orbite) : $\Delta\theta = \frac{6\pi Gm}{c^2a(1-e^2)}$; nous appliquons cette formule au mobile fictif M ($m = m_1 + m_2$ et $a = a_1 + a_2$). D'autre part, la troisième loi de Kepler nous dit que $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm}$, ce qui va nous permettre d'éliminer a dans la formule précédente : $\frac{1}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GmT^2}$, donc $\frac{1}{a} = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)^{\frac{1}{3}}.T^{-\frac{2}{3}}$. En substituant dans la formule de la précession, il vient :

$$\Delta\theta = \frac{6\pi Gm}{c^2(1-e^2)}.\left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)^{\frac{1}{3}}.T^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{c^2(1-e^2)}.(2\pi)^{\frac{5}{3}}.(Gm)^{\frac{2}{3}}.T^{-\frac{2}{3}}.$$

Divisons par T pour obtenir la précession par unité de temps (notée $\dot{\omega}$) :

$$\dot{\omega} \approx \frac{3G^{\frac{2}{3}}(m_1+m_2)^{\frac{2}{3}}}{c^2(1-e^2)}.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{5}{3}}.$$

Les astronomes savent mesurer la période T, l'excentricité e, et la précession $\dot{\omega}$, si son amplitude est suffisante (comme c'est le cas chez les pulsars binaires) ; ceci leur permet alors de calculer la somme des masses des deux étoiles.

Un tel calcul ne permet pas, à lui seul, de tester les théories de la gravitation, pour plusieurs raisons : d'abord, il faut évaluer la somme des masses $m_1 + m_2$ par d'autres méthodes, pour croiser les résultats et vérifier leur cohérence ; ensuite, plusieurs théories peuvent conduire aux mêmes formules ; par exemple, la métrique de Ni et celle de Schwarzschild, comme nous l'avons vu, donnent une seule et même formule pour la précession du périastre.

33 Décalage gravitationnel des pulsars binaires

Une seconde technique permet d'évaluer indirectement les masses m_1 et m_2 (ou du moins d'établir une contrainte très stricte sur leurs valeurs possibles) : elle utilise le décalage gravitationnel, c'est-à-dire l'effet Einstein. Elle se base sur le fait que le rythme de l'écoulement du temps dépend du potentiel gravitationnel. Elle ne s'applique qu'aux pulsars binaires (ou aux

pulsars doubles), car c'est seulement dans ce cas qu'on dispose d'un "chronomètre embarqué" suffisamment précis. Nous supposerons que le pulsar est M_1, l'autre étoile étant M_2. C'est le champ gravitationnel de M_2 qui perturbe la fréquence apparente des pulsations du pulsar M_1 : le "chronomètre" ralentit quand les deux étoiles se rapprochent (parce-que le champ gravitationnel est plus fort), et il accélère quand elles s'éloignent. On va donc comparer la fréquence des pulsations à l'apoastre et au périastre. Mais il faut se rappeler que cette fréquence apparente dépend aussi de la vitesse, d'après la relativité restreinte : au périastre, le déplacement du pulsar étant plus rapide qu'à l'apoastre, le chronomètre semble ralentir ; cet effet s'ajoute à l'effet Einstein.

Etudions d'abord l'effet Einstein proprement dit. C'est la distance entre le pulsar et l'autre étoile qui va intervenir ici ; donc il est pratique de supposer que cette autre étoile est fixe, et que le pulsar décrit autour d'elle une ellipse de demi-grand axe $a = a_1 + a_2$ (identique à l'orbite décrite par le mobile fictif M). Appelons b la distance maximale (apoastre) et d la distance minimale (périastre). On a donc : $a = \frac{b+d}{2}$, ou $b + d = 2a$. L'excentricité e de l'orbite est donnée par : $e = \frac{b-d}{b+d}$; par conséquent : $b - d = (b + d)e = 2ae$, $1+e = \frac{2b}{b+d} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$, $1-e = \frac{2d}{b+d} = \frac{2d}{2a} = \frac{d}{a}$, $1-e^2 = (1+e)(1-e) = \frac{b}{a}.\frac{d}{a} = \frac{bd}{a^2}$.

D'après la formule : $dt_{dist} = e^{\frac{k}{r}} dt_{loc} = e^{\frac{Gm}{rc^2}} dt_{loc}$, calculons, pour une même valeur de dt_{loc} (par exemple la période de pulsation du pulsar), le quotient des périodes apparentes (évaluées par un observateur terrestre) au périastre et à l'apoastre :

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}} dt_{loc}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}} dt_{loc}} \approx \left(1 + \frac{Gm_2}{dc^2}\right).\left(1 - \frac{Gm_2}{bc^2}\right) \approx 1+\frac{Gm_2}{dc^2}-\frac{Gm_2}{bc^2} \approx 1+\frac{Gm_2}{c^2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) \ ;$$

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}} \approx 1 + \frac{Gm_2}{c^2}.\frac{b-d}{bd} = 1 + \frac{Gm_2}{c^2}\frac{2ae}{a^2(1-e^2)} = 1 + \frac{2Gm_2 e}{c^2 a(1-e^2)}.$$

Nous avons vu précédemment que $\frac{1}{a} = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)^{\frac{1}{3}}.T^{-\frac{2}{3}} = (Gm)^{-\frac{1}{3}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (où $m = m_1 + m_2$) ; nous pouvons donc écrire :

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}} \approx 1 + \frac{2Gm_2 e}{c^2(1-e^2)}.G^{-\frac{1}{3}}.m^{-\frac{1}{3}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

On peut encore remarquer que l'excentricité e est généralement assez proche de 0, donc $\frac{e}{1-e^2} \approx e.(1+e^2) \approx e + e^3$; il n'est pas question de négliger e (qui est au centre de notre calcul), mais on pourra généralement négliger e^3, ce

qui revient à supprimer le facteur $(1-e^2)$ du dénominateur.

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2}.G^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Nous allons maintenant étudier le ralentissement du chronomètre lié à la vitesse, selon la transformation de Lorentz, qu'on pourra résumer, dans le cas présent, par : $dt_{dist} = ch\frac{w}{c}.dt_{loc} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.dt_{loc}$. Calculons une nouvelle fois le quotient des périodes apparentes, évaluées par un observateur terrestre, au périastre et à l'apoastre :

$$\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}.dt_{loc}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}.dt_{loc}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_{b_1}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_{d_1}^2}{c^2}}} \approx \left(1-\frac{v_{b_1}^2}{2c^2}\right).\left(1+\frac{v_{d_1}^2}{2c^2}\right) \approx 1 + \frac{v_{d_1}^2 - v_{b_1}^2}{2c^2}.$$

On aura compris que v_{b_1} et v_{d_1} désignent la vitesse du pulsar à l'apoastre et au périastre ; on considère cette fois-ci l'orbite du pulsar autour du centre de gravité O (orbite dont le demi-grand-axe est a_1 ; b_1 correspond à son apoastre et d_1 à son périastre) ; nous allons calculer v_{b_1} et v_{d_1} grâce à la seconde loi de Kepler (loi des aires). L'aire totale de l'orbite (balayée pendant le temps T) est égale à $\pi a_1^2(1-e^2)$; on a donc : $\frac{b_1 v_{b_1}}{2} = \frac{d_1 v_{d_1}}{2} = \frac{\pi a_1^2(1-e^2)}{T}$, d'où on tire : $v_{d_1}^2 - v_{b_1}^2 = \left(\frac{2\pi a_1^2(1-e^2)}{T}\right)^2.\left(\frac{1}{{d_1}^2} - \frac{1}{{b_1}^2}\right)$.

$$\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1 + \frac{4\pi^2 a_1^4(1-e^2)^2}{2c^2T^2}.\frac{b_1^2 - d_1^2}{b_1^2 d_1^2}.$$

Nous avons vu que $b_1 = a_1(1+e)$, que $d_1 = a_1(1-e)$, et que $b_1 d_1 = a_1^2(1-e^2)$; donc : $\frac{b_1^2 - d_1^2}{b_1^2 d_1^2} = \frac{a_1^2\left[(1+e)^2-(1-e)^2\right]}{a_1^4(1-e^2)^2} = \frac{4e}{a_1^2(1-e^2)^2}$;

$$\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1 + \frac{4\pi^2 a_1^4(1-e^2)^2}{2c^2T^2}.\frac{4e}{a_1^2(1-e^2)^2} = 1 + \frac{2e}{c^2}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-2}.a_1^2.$$

Nous savons que $\frac{a_1}{a} = \frac{m_2}{m}$; donc $a_1^2 = a^2.\left(\frac{m_2}{m}\right)^2$. D'autre part, $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm}$ (troisième loi de Kepler), donc $a^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{4}{3}}.(Gm)^{\frac{2}{3}}$, et $a_1^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{4}{3}}.(Gm)^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2^2}{m^2}$.

$$\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1+\frac{2e}{c^2}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-2}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{4}{3}}.(Gm)^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2^2}{m^2} = 1+\frac{2e}{c^2}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.(Gm)^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2^2}{m^2};$$

$$\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.G^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}.$$

Combinons maintenant les deux effets, en multipliant les deux coefficients de ralentissement du "chronomètre" (le coefficient dû à l'effet Einstein, et le coefficient justifié par la relativité restreinte) ; nous obtenons :

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}}.\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx \left(1+\frac{2e}{c^2}.G^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\right).\left(1+\frac{2e}{c^2}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.G^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}\right) \;;$$

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}}.\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1+\frac{2e}{c^2}.G^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}+\frac{2e}{c^2}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.G^{\frac{2}{3}}.\frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}} \;;$$

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}}.\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1+\frac{2e}{c^2}.G^{\frac{2}{3}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}}+\frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}\right).$$

Comme $\frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}}+\frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}=\frac{m_2.m+m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}=\frac{m_2.(m_1+m_2)+m_2^2}{(m_1+m_2)^{\frac{4}{3}}}=\frac{m_2.(m_1+2m_2)}{(m_1+m_2)^{\frac{4}{3}}}$, on obtient, finalement :

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}}.\frac{ch\frac{w_{d_1}}{c}}{ch\frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1+\frac{2e}{c^2}.G^{\frac{2}{3}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.\frac{m_2.(m_1+2m_2)}{(m_1+m_2)^{\frac{4}{3}}}.$$

Par conséquent, la mesure du retard gravitationnel entre l'apoastre et le périastre (et de la période T) permet de calculer la quantité $\frac{m_2.(m_1+2m_2)}{(m_1+m_2)^{\frac{4}{3}}}$, ce qui est un renseignement précieux, surtout si on connaît déjà m_1+m_2 grâce à la précession du périastre (voir section précédente) : on peut alors calculer individuellement la masse du pulsar (m_1) et celle de l'autre étoile (m_2).

34 Effet Einstein à la surface des étoiles à neutrons

Comme nous l'avons vu précédemment, à la surface d'une étoile à neutrons telle que $M = 1,4\ M_\odot$ et $r = 14\ km$, l'effet Einstein, calculé selon les métriques de Ni et de Schwarzschild, donne des résultats qui diffèrent de 17% ; un tel écart pourrait en principe être mis en évidence, ce qui permettrait de départager au moins ces deux théories. Malheureusement, la technique dont nous avons parlé dans la section précédente, appliquée aux pulsars binaires actuellement étudiés, permet de mesurer l'effet Einstein à une distance largement supérieure à 100 000 km, ce qui est beaucoup trop loin.

Si nous désirons départager vraiment les métriques de Ni et de Schwarzschild (ou seulement tester cette dernière dans le domaine des champs forts, ce qui est absolument indispensable), c'est directement à la surface des étoiles à neutrons qu'il faut mesurer l'effet Einstein. Cette expérience a été réalisée par le satellite XMM-Newton, qui a mesuré, sur le spectre d'une étoile à neutrons, un décalage vers le rouge des raies du fer et de l'oxygène : $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,35$, soit un quotient $\frac{\lambda_{réception}}{\lambda_{émission}} = \frac{\lambda+\Delta\lambda}{\lambda} = 1 + z = 1,35$ (ce qui correspond au coefficient de dilatation du temps à la surface de l'astre, si on admet que le redshift dû à la vitesse radiale est négligeable). Bien que la masse et le rayon exacts de cette étoile soient inconnus, on peut essayer d'interpréter ce résultat.

Selon la métrique de Schwarzschild, le coefficient de dilatation du temps est donné par la formule : $\frac{\lambda_{réception}}{\lambda_{émission}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}} = 1,35$; dans le cas présent, le calcul donne : $\frac{k}{r} = \frac{1}{2}.\left(1 - \frac{1}{1,35^2}\right) \approx 0,225$.

Selon la métrique de Ni, ce coefficient est donné par : $\frac{\lambda_{réception}}{\lambda_{émission}} = e^{\frac{k}{r}} = 1,35$, d'où on tire : $\frac{k}{r} = Log\ 1,35 \approx 0,300$.

D'autre part, on peut évaluer M et r par la formule : $r \approx 16.\sqrt[3]{\frac{M_\odot}{M}}$. Il s'agit d'une formule approximative et provisoire, basée sur l'étude théorique (très difficile) de l'état de la matière à l'intérieur des étoiles à neutrons.

Remarquons au passage que, lorsque M augmente, r diminue : ce phénomène paradoxal est bien établi, et concerne aussi bien les étoiles à neutrons que les naines blanches.

Mais il y a une autre remarque, qui concerne plus directement notre propos : cette formule ne prend pas en compte le fait qu'en métrique de Ni, le phénomène que j'ai appelé "création d'espace" prend des proportions importantes lorsque r se rapproche de $2k$, ce qui est précisément le cas ici. Nous allons donc distinguer r_{dist} (rayon de l'étoile évalué par l'observateur distant) de r_{loc} (rayon mesuré localement, par un observateur situé à sa surface). C'est bien sûr r_{loc} qui intervient dans la formule ci-dessus, ainsi que dans le calcul basé sur la métrique de Schwarzschild (donc $\frac{k}{r_{loc}} \approx 0,225$), tandis que dans le calcul basé sur la métrique de Ni, il s'agit de r_{dist} (donc, en posant $r = r_{dist}$: $\frac{k}{r} = \frac{k}{r_{dist}} \approx 0,3$). Comme $r_{loc} = r.e^{\frac{-\Phi}{c^2}} = r.e^{\frac{k}{r}}$, le calcul numérique donne : $\frac{r_{loc}}{k} = \frac{r.e^{\frac{k}{r}}}{k} = \frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}} = \frac{e^{0,3}}{0,3}$, donc $\frac{k}{r_{loc}} = \frac{0,3}{e^{0,3}} \approx 0,222$. En définitive, nous voyons qu'il n'y a pas de contradiction entre nos deux calculs : la compacité $\frac{k}{r}$ de l'étoile est de l'ordre de $0,3$ pour l'observateur distant, et de $0,22$ en valeur

locale.

Amusons-nous quand même à calculer la masse approximative de cette étoile. Nous utiliserons les deux égalités suivantes, dans lesquelles $r = r_{dist}$ et $x = \frac{M}{M_\odot}$:

$$r_{loc} \approx 16.\sqrt[3]{\frac{M_\odot}{M}} = 16.\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\ ;$$

$$r_{loc} = r.e^{\frac{k}{r}} = k.\frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}} = \frac{k}{k_\odot}.k_\odot.\frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}} \approx \frac{M}{M_\odot}.1,47.\frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}} = 1,47.x.\frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}}.$$

Ces deux égalités permettent d'éliminer r_{loc} :

$$1,47.x.\frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}} \approx 16.\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\ ;$$

$$x.\frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}} \approx \frac{16}{1,47}.\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \approx 10,88.\sqrt[3]{\frac{1}{x}};$$

$$x^3.\left(\frac{e^{\frac{k}{r}}}{\frac{k}{r}}\right)^3 \approx 10,88^3.\frac{1}{x};$$

$$x^4 \approx 10,88^3.\left(\frac{\frac{k}{r}}{e^{\frac{k}{r}}}\right)^3 \approx \left(10,88.\frac{\frac{k}{r}}{e^{\frac{k}{r}}}\right)^3\ ;$$

$$x \approx \left(10,88.\frac{\frac{k}{r}}{e^{\frac{k}{r}}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Dans le cas de l'étoile à neutrons étudiée, on a vu que $\frac{k}{r} \approx 0,3$, donc :

$$x \approx \left(10,88.\frac{0,3}{e^{0,3}}\right)^{\frac{3}{4}} \approx \left(10,88.\frac{0,3}{1,35}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 1,9.$$

Si ce résultat ($M \approx 1,9.M_\odot$) était confirmé, cette étoile à neutrons serait l'une des plus massives connues. Mais n'oublions pas que le calcul est basé sur une formule modérément fiable...

Comme nous venons de le voir, le test est, finalement, peu probant. Pour arriver à un résultat réellement discriminant, il serait bon d'étudier des étoiles plus massives, car, au-delà de deux masses solaires, les métriques de Ni et de Schwarzschild commencent à diverger sensiblement ; mais les étoiles à neutrons atteignent rarement $2.M_\odot$... Il serait utile aussi (cela va de soi) d'étudier

prioritairemant les étoiles dont la masse est bien établie, c'est-à-dire celles qui appartiennent à des systèmes binaires comportant une étoile à neutrons (pas nécessairement visible comme pulsar) et une étoile "banale", ce couple devant être aussi proche de nous que possible (pour que les raies spectrales soient identifiables), mais pas nécessairement très serré, et d'inclinaison i proche de 90° (pour que les masses puissent être déterminées avec la meilleure précision). Quant à l'évaluation du rayon, elle risque de rester longtemps entachée d'erreur, même s'il est possible d'améliorer un peu la formule qui donne le rayon en fonction de la masse.

Encore une remarque concernant cette formule. Nous allons réutiliser l'égalité $x \approx \left(10,88.\frac{\frac{k}{r}}{e^{\frac{k}{r}}}\right)^{\frac{3}{4}}$, dans deux cas particuliers : $\frac{k}{r} = \frac{1}{2}$ (soit $r = 2.k$=rayon de Schwarzschild) et $\frac{k}{r} = 1$ (soit $r = k$=demi-rayon de Schwarzschild).
- Premier cas (rayon de Schwarzschild) :
$x \approx \left(10,88.\frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{4}} \approx \left(10,88.\frac{0,5}{1,648}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 2,45$, donc $M \approx 2,45.M_\odot$.
- Deuxième cas (demi-rayon de Schwarzschild) :
$x \approx \left(10,88.\frac{1}{e^1}\right)^{\frac{3}{4}} \approx \left(10,88.\frac{1}{2,718}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 2,83$, donc $M \approx 2,83.M_\odot$.

Nous voyons donc qu'une petite augmentation de la masse peut conduire très vite les étoiles à neutrons dans la "zone de turbulence", à l'approche du rayon de Schwarzschild. Mais il faut savoir que la formule $r_{loc} \approx 16.\sqrt[3]{\frac{M_\odot}{M}}$ n'est plus valable lorsque la matière est trop chaude, car une température trop élevée entraîne une augmentation de la pression, qui modifie son équilibre interne. C'est précisément ce qui arrive au voisinage du rayon de Schwarzschild, car l'énergie cinétique tend à l'emporter sur l'énergie de masse. Une perte de chaleur est nécessaire pour que l'étoile revienne vers l'équilibre précédent, ce qui s'accompagne d'une perte de masse. Nous en reparlerons au sujet des trous noirs.

Actuellement, la plupart des pulsars connus ont une masse proche de $1,44.M_\odot$; quelques-uns ont une masse supérieure, le record étant de $2,7.M_\odot$ (sous réserve de confirmation). L'étude de tels astres, proches de la limite entre étoiles à neutrons et trous noirs, pourrait fournir des indications très précieuses pour départager les théories de la gravitation. En particulier, quand r tend vers $2k$, le coefficient de dilatation du temps à la surface de l'étoile doit tendre vers l'infini en métrique de Schwarzschild, vers $1,649$ en métrique de Ni (voir la section sur l'effet Einstein). La découverte d'un pul-

sar de $2,7.M_\odot$, si elle était confirmée, serait donc d'une importance capitale. En effet, selon la métrique de Ni, comme nous venons de le voir, cette étoile serait bien une étoile à neutrons (car l'équation d'état usuelle lui attribue une densité suffisante), mais aussi un "trou noir de Ni" (de rayon inférieur à $2k$). Ceci n'est en rien contradictoire : un trou noir de Ni n'est pas noir ; la lumière nous en parvient un peu affaiblie, avec un redshift supérieur à $1,649$. En métrique de Schwarzschild, l'existence même d'une telle étoile soulève un problème majeur : l'étoile, étant visible, ne peut pas être un trou noir (au sens de Schwarzschild), et son rayon doit donc impérativement être supérieur à $2k$, ce qui impose la révision de l'équation d'état des étoiles à neutrons (ou du moins l'abandon de certaines versions de cette équation d'état).

L'étude approfondie de ces étoiles à neutrons massives, proches de la limite de formation des trous noirs, est particulièrement prometteuse.

35 Effet Shapiro chez les pulsars binaires

Nous considérons, ici encore, un système double formé d'un pulsar (M_1) et d'une autre étoile (M_2) ; nous supposons, pour simplifier, que l'orbite est circulaire ; nous appelons i l'angle formé par la normale au plan de l'orbite avec la ligne de visée. Si l'angle i était rigoureusement égal à 90°, le pulsar serait éclipsé par l'étoile à chaque révolution, donnant lieu à un effet Shapiro maximal : le temps de parcours de la lumière, du pulsar jusqu'à nous, serait fortement augmenté, juste avant et juste après l'éclipse. Si i est proche de 90°, l'effet Shapiro, sans être maximal, pourra cependant être observé. Si i est proche de 0°, il n'y aura pas d'effet observable. Ce phénomène existe chez tous les systèmes binaires, mais dans le cas d'un pulsar, le "chronomètre embarqué" permet une mesure beaucoup plus précise.

Nous appellerons "moitié distale de l'orbite" la moitié de l'orbite qui est la plus éloignée de l'observateur, et "moitié proximale" celle qui est la plus proche. La position du pulsar sur son orbite (circulaire) sera repérée par un angle ωt, l'origine étant le milieu de la moitié distale de l'orbite (point où le plan défini par la normale à l'orbite et la ligne de visée, coupe l'orbite). Lorsque le pulsar se trouve dans la moitié distale de l'orbite, sa lumière met plus de temps pour nous parvenir, pour deux raisons : d'abord, le pulsar étant plus loin de nous, sa lumière a naturellement une distance plus grande à parcourir, ce qui va prendre plus de temps (c'est le "retard normal", tel qu'on pourrait le calculer en mécanique newtonienne, en se basant sur la géométrie

d'Euclide) ; ensuite, l'autre étoile "crée de l'espace" dans son voisinage (d'où un "retard anormal", qui correspond à l'effet Shapiro proprement dit.

Etudions d'abord l'effet Shapiro proprement dit. Nous avions obtenu la formule : $\Delta T = \frac{4GM}{c^3} \left[2 + Log4 + Log\frac{r_t}{r_s} + Log\frac{r_m}{r_s}\right]$, pour un aller-retour Terre-Mercure-Terre (en passant au ras de la surface solaire) ; r_t était la distance Terre-Soleil, r_m la distance Mercure-Soleil, r_s le rayon du Soleil. Maintenant nous envisageons un aller simple pulsar-Terre, en passant près de l'étoile M_2. Notons d_t la distance de la Terre par rapport à l'étoile M_2, $r = r_1 + r_2$ la distance entre le pulsar et l'étoile M_2, et d_{min} la distance minimale entre le rayon lumineux (pulsar $\rightarrow$ Terre) et l'étoile M_2.

Lorsque le pulsar se trouve dans la moitié distale de l'orbite, le retard Shapiro est donné par :

$$\Delta t_{dist} = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + Log4 + Log\frac{d_t}{r_{min}} + Log\frac{r}{r_{min}}\right] = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + Log4 + Log\frac{d_t.r}{r_{min}^2}\right].$$

Lorsqu'il se trouve dans la moitié proximale, la formule devient :

$$\Delta t_{prox} = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + Log4 + Log\frac{d_t}{r_{min}} - Log\frac{r}{r_{min}}\right] = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + Log4 + Log\frac{d_t}{r}\right].$$

On peut montrer assez facilement que $r_{min}^2 = r^2(cos^2\ \omega t.cos^2\ i + sin^2\ \omega t)$; ce qui nous donne :

$$\Delta t_{dist} = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + Log4 + Log\frac{d_t.r}{r^2(cos^2\ \omega t.cos^2\ i + sin^2\ \omega t)}\right] \ ;$$

$$\Delta t_{dist} = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + Log4 + Log\frac{d_t}{r} - Log(cos^2\ \omega t.cos^2\ i + sin^2\ \omega t)\right] \ ;$$

$$\Delta t_{dist} = \Delta t_{prox} - \frac{2Gm_2}{c^3}\ Log(cos^2\ \omega t.cos^2\ i + sin^2\ \omega t).$$

Mais les astronomes ne mesurent pas un retard Shapiro absolu : il n'ont accès qu'à un retard relatif, c'est-à-dire aux variations de ΔT d'un point de l'orbite à l'autre ; ce retard est défini à une constante près. Le quotient $\frac{d_t}{r}$ n'est pas constant, puisqu'il sagit de la distance de la Terre à l'étoile M_2, qui tourne autour du centre de gravité du système ; les variations de d_t, au cours d'une révolution, sont de l'ordre de r_2 ; comme $Log\frac{d_t \pm r_2}{r} = Log\frac{d_t\left(1 \pm \frac{r_2}{d_t}\right)}{r} =$

$Log\frac{d_t}{r} + Log\left(1 \pm \frac{r_2}{d_t}\right) \approx Log\frac{d_t}{r} \pm \frac{r_2}{d_t} \approx Log\frac{d_t}{r}$ (car $r_2 << d_t$), on pourra admettre que $Log\frac{d_t}{r}$ est constant, ce qui nous autorise à poser :

$$\Delta t_{prox} = 0 \ ;$$

$$\Delta t_{dist} = -\frac{2Gm_2}{c^3}\ Log(cos^2\ \omega t.cos^2\ i + sin^2\ \omega t).$$

Voyons maintenant le retard normal. Le pulsar tourne autour du centre de gravité O du système sur une orbite circulaire de rayon r_1, d'inclinaison i, donc son excès de distance (par rapport à la distance $O \rightarrow$ Terre, prise comme référence) est $r_1.cos\omega t.sin\ i$, donc le retard normal est :

$$\delta t = \frac{r_1.cos\omega t.sin\ i}{c}.$$

Nous savons que $\frac{r_1}{m_2} = \frac{r_2}{m_1} = \frac{r_1+r_2}{m_1+m_2} = \frac{r}{m}$, donc $r_1 = \frac{m_2}{m}.r$; d'autre part, d'après la troisième loi de Kepler : $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm}$, donc $r = \left[Gm\left(\frac{T}{2\pi}^2\right)\right]^{\frac{1}{3}}$.

$$r_1 = \frac{m_2}{m}.\left[Gm\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{m_2}{m}.G^{\frac{1}{3}}.m^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{m_2}{m^{\frac{2}{3}}}.G^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

La formule du retard normal s'écrit donc :

$$\delta t = \frac{m_2}{m^{\frac{2}{3}}}.G^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.\frac{cos\omega t.sin\ i}{c}.$$

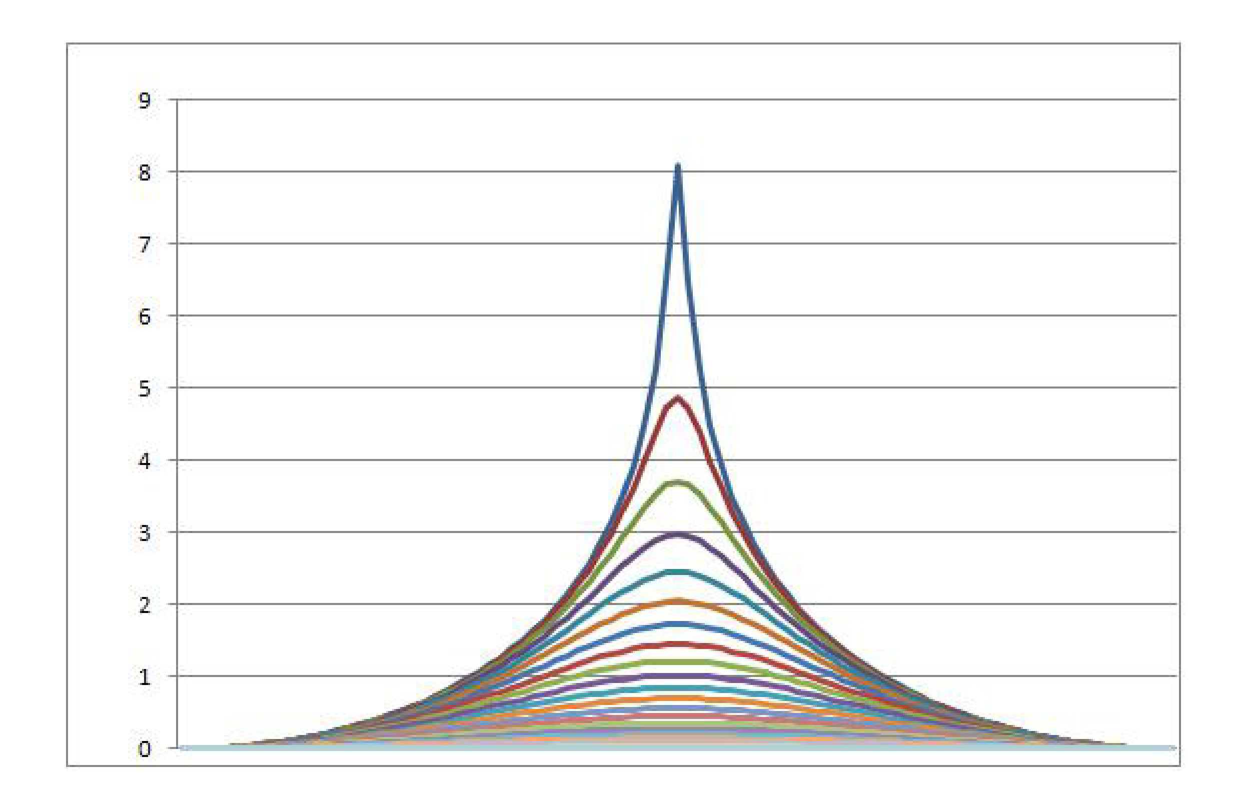
Pour les astronomes, il est facile de distinguer le retard Shapiro du retard normal : le retard Shapiro s'annule sur la moitié proximale de l'orbite, et a une courbe caractéristique sur la moitié distale ; le retard normal, quant à lui, est une courbe sinusoïdale parfaite.

Le retard normal permet de déterminer la quantité $\frac{m_2}{(m_1+m_2)^{\frac{2}{3}}}.sin\ i$, ce qui serait peu utilisable, si on ne connaissait pas la valeur de i.

Heureusement, le retard Shapiro peut permettre de déterminer i, à condition que cet angle ne soit pas trop fermé ; pour cela, il faut examiner la forme de la courbe, qui forme un pic d'autant plus étroit que i est plus proche de 90°.

Dans la figure ci-dessous, nous avons représenté (pour la moitié distale de l'orbite : $-\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2}$) la fonction suivante : $-Log(cos^2\, \omega t.cos^2\, i + sin^2\, \omega t)$. Il reste à la multiplier par $\frac{2Gm_2}{c^3}$ pour obtenir le retard Shapiro. Chaque courbe correspond à une valeur de l'inclinaison i. De haut en bas : $i = 89^\circ$, $i = 85^\circ$, $i = 81^\circ$, $i = 77^\circ$, $i = 73^\circ$, etc. On peut voir que la largeur du pic à mi-hauteur croît quand i décroît : c'est ce qui permet de déterminer l'inclinaison de l'orbite.

Une fois l'angle i déterminé, l'effet Shapiro permet de calculer m_2 (d'après la hauteur du pic). Donc, dans le meilleur des cas, le retard Shapiro combiné au retard normal, permet de déterminer l'inclinaison de l'orbite, et les masses individuelles des deux étoiles. Il reste alors à recouper ces résultats avec ceux qui ont été obtenus par les autres techniques, pour tester les différentes théories.



On peut remarquer que la formule de l'effet Shapiro obtenue avec la métrique triviale de Ni ne diffère pas de celle qui est obtenue grâce à la relativité générale.

36 Précession géodétique des pulsars binaires

Soit $\vec{S}$ le moment cinétique d'un corps. La précession (évolution du vecteur $\vec{S}$ dans le temps) est "gérée" par un vecteur noté $\vec{\Omega}$, tel que : $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{S}$. Pour étudier la précession, il faut calculer ce vecteur $\vec{\Omega}$.

Dans le cas de la Terre, la précession des équinoxes est due au couple exercé par les forces de marées du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial de la Terre. Ce mécanisme est négligeable chez les pulsars, car ce sont des astres très compacts. Mais deux autres mécanismes entrent en jeu : la précession de Thomas et la précession de de Sitter.

La précession de Thomas est un phénomène lié à la relativité restreinte. Elle concerne les objets qui subissent une accélération $\vec{\gamma}$ non gravitationnelle, et s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\frac{\vec{\gamma} \wedge \vec{v}}{c^2}.$$

Si les vecteurs $\vec{\gamma}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires, cette formule devient (sous forme scalaire) :

$$\Omega = \frac{\gamma.v}{2c^2}.$$

La précession de de Sitter est un phénomène lié à la gravitation : lorsqu'un mobile en chute libre (se déplaçant sur une géodésique) subit une "accélération" gravitationnelle, cette accélération produit une précession différente de celle de Thomas : en effet, elle est causée par la déformation de l'espace-temps ; elle est liée au potentiel gravitationnel Φ, et n'a rien à voir avec la relativité restreinte. Elle se calcule à l'aide de la formule suivante (dans laquelle $\vec{\bigtriangledown}\Phi$ désigne le gradient du potentiel) :

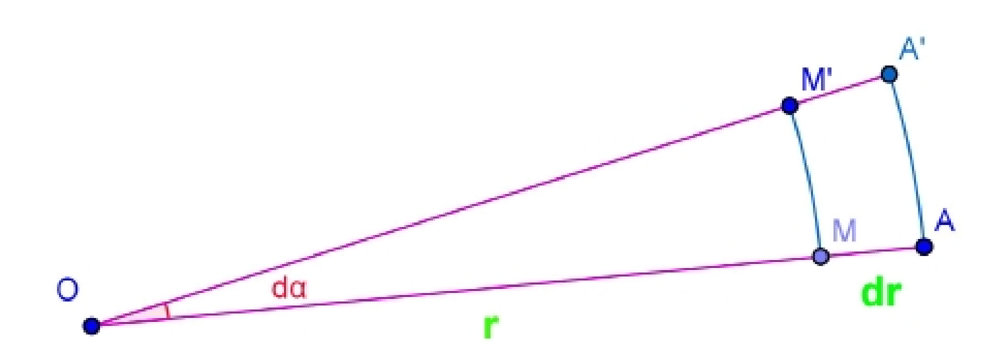
$$\vec{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{\vec{\bigtriangledown}\Phi \wedge \vec{v}}{c^2}.$$

Si les vecteurs $\vec{\gamma}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires, cette formule devient (sous forme scalaire) :

$$\Omega = \frac{3\ \gamma.v}{2c^2}.$$

Voici quelques explications sur ces deux phénomènes.

Considérons un mobile M en mouvement sur une orbite circulaire de centre O et de rayon r. Plaçons, sur la demi-droite $[OM)$, un point A tel que $OA = r + dr$ (et $MA = dr$). Lorsque le point M tourne d'un angle $d\alpha$ autour de O, le point A tourne du même angle, et le segment $[MA]$ également. C'est, du moins, le point de vue d'un observateur lié à O. Mais qu'en est-il pour un observateur lié à M ?



En mécanique Galiléenne, l'observateur lié au mobile M va calculer l'angle de rotation $d\alpha_M$ du segment $[MA]$ par la procédure suivante : il va mesurer MM' (déplacement élémentaire de M) et AA' (déplacement élémentaire de A), puis il va calculer la différence et la diviser par dr :

$$d\alpha_M = \frac{AA' - MM'}{dr} = \frac{(r + dr)d\alpha - rd\alpha}{dr} = \frac{dr.d\alpha}{dr} = d\alpha.$$

Pas de surprise : pour l'observateur mobile, le segment $[MA]$ semble tourner de la même façon que pour l'observateur immobile.

Que se passe-t-il en relativité restreinte ? Les mesures de MM' et AA' vont être biaisées, car l'observateur mobile utilise des règles raccourcies dans le sens du déplacement : la longueur des règles étant multipliée par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, le résultat de ces deux mesures sera divisé par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. La mesure de dr,

elle, sera inchangée. Donc :

$$d\alpha_M = \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).d\alpha.$$

Quand l'observateur immobile (ou non accéléré) estime que le segment $[MA]$ a fait un tour sur lui-même, l'observateur mobile (lié à M) estime qu'il a fait un peu plus d'un tour ; ceci signifie que les axes de référence utilisés par l'observateur mobile ont légèrement tourné en sens inverse. Pour un tour d'orbite, un gyroscope transporté par M va dériver, par rapport à un gyroscope immobile, d'un angle proche de $-\pi\frac{v^2}{c^2}$. Ce décalage correspond à la précession de Thomas.

Remarquons que c'est le mobile M qui subit la précession, et non O, car c'est M qui est accéléré, et non O : la notion d'accélération, en relativité restreinte, n'est pas relative. En relativité générale non plus.

La valeur de cette précession peut s'écrire :

$$\Omega = -\frac{d\alpha_M - d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\omega$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire, on a : $v = r\omega$ et $\gamma = r\omega^2$, donc $\gamma v = r^2\omega^3$; par conséquent :

$$\Omega = -\frac{v^2\omega}{2c^2} = -\frac{r^2\omega^3}{2c^2} = -\frac{\gamma.v}{2c^2} \ ,$$

ce qui est la forme scalaire de la formule de la précession de Thomas, que nous avons utilisée précédemment.

Que se passe-t-il en gravitation relativiste ? On va supposer qu'au point O se trouve une masse m ; posons : $k = \frac{Gm}{c^2}$. D'après ce que nous avons vu dans la première partie de cette étude, en raison du champ gravitationnel produit par cette masse, un observateur local (immobile par rapport à O) situé en M n'appréciera pas les distances MM', AA' et dr de la même façon que l'observateur distant (également immobile par rapport à O) ; en effet, toutes ses mesures de distances (locales) seront multipliées par le coefficient

de dilatation de l'espace : $e^{-\frac{k}{r}}$. On aura donc :

$$d\alpha_{loc} = \frac{d(re^{-\frac{k}{r}}d\alpha)}{e^{-\frac{k}{r}}dr} = \frac{r.\frac{k}{r^2}e^{-\frac{k}{r}}dr + e^{-\frac{k}{r}}dr}{e^{-\frac{k}{r}}dr}d\alpha = \left(1 + \frac{k}{r}\right).d\alpha.$$

Dans le cas d'une orbite circulaire, on a : $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}$ (voir section sur les orbites circulaires), donc : $\frac{v^2}{c^2} \approx \frac{k}{r}$; par conséquent : $d\alpha_{loc} \approx \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).d\alpha$.

Mais, attention : l'observateur mobile lié à M ne se confond pas avec l'observateur local (qui est immobile) ; en effet, le premier utilise des règles raccourcies. Pour passer de l'observateur local à l'observateur mobile, on procède comme pour la précession de Thomas :

$$d\alpha_M = \frac{d\alpha_{loc}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).d\alpha \approx \left(1 + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).d\alpha.$$

Pour un tour d'orbite, un gyroscope transporté par M va dériver, par rapport à un gyroscope immobile, d'un angle égal à $-3\pi\frac{v^2}{c^2}$. Ce décalage correspond à la précession de de Sitter ; c'est le triple de la précession de Thomas. On a donc (en valeur scalaire) : $\Omega = -\frac{3\gamma.v}{2c^2}$.

Voyons maintenant comment ces deux formules s'appliquent dans le cas des pulsars binaires.

Considérons, une fois encore, le pulsar M_1 et l'étoile M_2 tournant sur des orbites circulaires autour du centre de gravité O. Nous voulons évaluer la précession $\vec{\Omega}$ du pulsar, causée par le champ gravitationnel de l'étoile et par le mouvement orbital.

Dans un repère lié à O, M_1, qui a pour vitesse v_1, subit une force $F_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ (où $r = r_1 + r_2$), ce qui produit une accélération centripète $\gamma_1 = \frac{Gm_2}{r^2}$; M_2, qui a pour vitesse v_2, subit une force $F_2 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = F_1$ (de sens contraire), ce qui produit une accélération centripète $\gamma_2 = \frac{Gm_1}{r^2}$.

Calculer la précession du pulsar M_1 revient à calculer comment tournent ses axes de coordonnées, par rapport à ceux de O (observateur de référence,

supposé immobile, ou, en tout cas, non accéléré). Pour cela, nous allons procéder en deux temps : tout d'abord, nous allons passer du repère lié à O au repère lié à l'étoile M_2 (ce qui fait intervenir une précession de Thomas, puisque le second repère est accéléré par rapport au premier, cette accélération étant non gravitationnelle), puis du repère lié à M_2 au repère lié au pulsar M_1 (ce qui fait intervenir une précession de de Sitter, puisque l'orbite du pulsar est dictée par le champ gravitationnel de l'étoile). Remarquons tout d'abord que ces deux précessions sont de même sens : si le pulsar et l'étoile orbitent dans le sens direct, alors les deux précessions sont rétrogrades, et réciproquement. Il suffit donc de calculer leurs modules et de les additionner.

Si l'étoile M_2 était immobile, elle produirait sur le pulsar M_1, en orbite autour d'elle, une précession de de Sitter ($\vec{\Omega}_2$) facile à calculer.

Mais c'est le point O qui est supposé immobile (ou en mouvement rectiligne et uniforme), tandis que l'étoile M_2 est orbite autour de lui ; nous allons donc commencer par calculer la précession de Thomas ($\vec{\Omega}_1$) associée à ce mouvement orbital.

$$\vec{\Omega}_1 = \frac{1}{2}\frac{(-\vec{\gamma_2}) \wedge \vec{v_1}}{c^2}$$

Comme les vecteurs $\vec{\gamma_2}$ et $\vec{v_1}$ sont perpendiculaires, le vecteur $\vec{\Omega}_1$ a pour module :

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\frac{\gamma_2.v_1}{c^2} = \frac{1}{2c^2}.\frac{Gm_1}{r^2}.v_1 = \frac{1}{2c^2}.\frac{Gm_2}{r^2}.v_2.$$

Calculons maintenant la précession de de Sitter. Le champ gravitationnel de M_2 est : $\Phi = -\frac{Gm_2}{r}$, dont le gradient est un champ de vecteurs de module : $\frac{Gm_2}{r^2}$ (correspondant, au sens près, à l'accélération gravitationnelle des mobiles situés dans ce champ). Donc M_1, qui est situé dans ce champ, à la distance $r = r_1 + r_2$ du centre, et qui se déplace à la vitesse $v = v_1 + v_2$ par rapport à M_2, perpendiculairement au vecteur $\vec{\nabla}\Phi$, va subir une précession de de Sitter donnée (en module) par :

$$\Omega_2 = \frac{3}{2c^2}.\frac{Gm_2}{r^2}.v.$$

Compte-tenu du fait que ces deux précessions sont de même sens, la précession totale du pulsar M_1 sera donc (en module) :

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = \frac{1}{2c^2}.\frac{Gm_2}{r^2}.v_2 + \frac{3}{2c^2}.\frac{Gm_2}{r^2}.v = \frac{Gm_2}{2r^2c^2}.(3v + v_2) = \frac{Gm_2}{2r^2c^2}.(3r + r_2).\omega.$$

Comme $\frac{m_1}{r_2} = \frac{m_2}{r_1} = \frac{m}{r}$:

$$\Omega = \frac{Gm_2}{2r^2c^2}.(3m + m_1).\frac{r}{m}.\frac{2\pi}{T} = \frac{G}{2rc^2}.\frac{2\pi}{T}.\frac{m_2(3m + m_1)}{m}.$$

Remplaçons $\frac{1}{r}$ par $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{2}{3}}.(Gm)^{-\frac{1}{3}}$:

$$\Omega = \frac{G}{2c^2}.\frac{2\pi}{T}.\frac{m_2(3m + m_1)}{m}.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{2}{3}}.(Gm)^{-\frac{1}{3}} \ ;$$

$$\Omega = \frac{G^{\frac{2}{3}}}{2c^2}.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{5}{3}}.\frac{m_2(4m_1 + 3m_2)}{m^{\frac{4}{3}}}.$$

Chez les pulsars, la précession modifie lentement la direction du faisceau lumineux qui balaie la Terre comme un phare ; il en résulte que l'intensité apparente de ce faisceau évolue dans le temps. Actuellement, la précession géodétique de plusieurs pulsars binaires a pu être évaluée, ce qui permet de calculer la quantité $\frac{m_2(4m_1+3m_2)}{m^{\frac{4}{3}}}$. L'accord avec les valeurs de m_1 et m_2, obtenues par d'autres techniques, est satisfaisant. Ce résultat, bien entendu, ne permet pas de départager les métriques de Ni et de Schwarzschild.

Une autre façon d'accéder à la précession géodétique consiste à placer des gyroscopes dans des satellites en orbite terrestre. Cette expérience a été réalisée avec succès, avec une assez bonne précision, grâce au satellite Gravity Probe B.

Le fait que l'expérience confirme le calcul de de Sitter prouve que l'interaction gravitationnelle est profondément différente de toutes les autres forces : soit la gravité déforme la géométrie de l'espace, soit (ce qui, mathématiquement, revient au même) elle modifie la longueur des règles que les observateurs utilisent pour effectuer leurs mesures.

37 Effet Lense-Thirring

L'effet Lense-Thirring (entraînement des référentiels, "frame-dragging" en Anglais) est un phénomène dont le principe est extrêmement facile à comprendre dans le modèle simpliste que nous avons étudié pour commencer : celui du système solaire. Nous avons vu que, pour un observateur distant O (immobile par rapport au Soleil), la vitesse apparente de la lumière est donnée par la formule : $c_{dist} = c.e^{-\frac{2k}{r}} = c.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$. Ce qui signifie que cet observateur verra la lumière se déplacer moins vite dans un champ gravitationnel ; le coefficient de ralentissement $e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$ dépend du potentiel Φ, mais il est indépendant de la direction de propagation. Imaginons maintenant un autre observateur distant O' (situé, lui aussi, dans un potentiel nul), se déplaçant à la vitesse $-\vec{V}$ par rapport au premier. Il verra l'observateur O, ainsi que le Soleil, se déplacer à la vitesse $\vec{V}$, dans son référentiel propre. Dans ce référentiel, la vitesse des rayons lumineux qui se propagent dans le champ gravitationnel du Soleil sera variable selon leur direction : supérieure à $c.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$ pour les rayons se déplaçant dans le même sens que le Soleil, inférieure pour ceux qui se déplacent en sens inverse. Pour cet observateur O', la lumière semblera donc entraînée par le Soleil. Ceci permet de comprendre l'expression : "entraînement des référentiels". Cet effet (bien que très faible et difficile à mesurer) est particulièrement intéressant, car il n'existe rien d'équivalent en gravitation newtonienne. Bien entendu, lorsque le rayon lumineux s'échappe du champ gravitationnel, il retrouve (du point de vue de O', comme de O) une vitesse apparente égale à c ; mais sa vitesse locale a toujours été égale à c.

Le raisonnement qui précède est simpliste, dans la mesure où il suppose le Soleil isolé dans l'espace ; les choses commencent à se compliquer lorsque la lumière se déplace, par exemple, dans le champ gravitationnel produit par un système double. Dans ce cas, il faut combiner les entraînements dus aux deux étoiles : de quelle façon ? Ce problème dépasse le cadre du présent travail ; mais il est très important de le résoudre si on désire accéder au second palier de la gravitation relativiste. Nous en reparlerons dans la section sur la matière noire. Pour le moment, disons simplement que l'étude de l'entraînement des référentiels équivaut à étudier (du point de vue de l'observateur distant) à quelle vitesse se déplace la lumière, en fonction de sa direction, en chaque point. Jusqu'ici, nous avons étudié le cas particulier du système solaire (ou équivalent), du point de vue d'un observateur distant immobile par rapport au Soleil : dans ce cas particulier, la vitesse de la lumière (pour cet observateur) était égale à $c.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$; elle était donc dépendante du potentiel gravitationnel (ou de la distance r), mais pas de sa direction de propagation ;

dans le cas général, la vitesse de la lumière dépendra non seulement du potentiel Φ, mais aussi de sa direction.

Récemment (en mai 2011, après des mois de travail, destinés à identifier et à éliminer les bruits parasites) ont été publiés les résultats de l'expérience Gravity Probe B, qui semblent mettre en évidence (sous réserve de confirmation) l'effet Lense-Thirring, dans un cas un peu particulier. Cette expérience était basée sur l'idée suivante : lorsqu'un satellite (comme Gravity Probe B) tourne autour de la Terre, à une altitude modérée, la face de la Terre tournée vers le satellite est nettement plus proche que la face opposée, et son attraction est donc beaucoup plus forte. Donc il n'est plus possible de considérer la totalité de la masse terrestre concentrée en un point, comme nous l'avons fait dans le cas du Soleil et de son système planétaire : il faut considérer que chaque partie élémentaire (dm) de la masse terrestre produit à la fois un potentiel gravitationnel et un entraînement du référentiel. On fait appel au calcul intégral pour reconstituer l'effet global. L'entraînement dû aux parties les plus proches (à l'aplomb, sous le satellite) l'emporte sur l'entraînement dû aux parties les plus éloignées (aux antipodes). L'entraînement résultant se fait dans le sens de la rotation de la Terre ; mais il décroît très vite avec la distance, et s'annule à l'infini. L'entraînement différentiel (qui s'exerce plus fortement sur la partie du satellite qui est la plus proche du sol) produit un couple qui est susceptible de faire tourner un gyroscope (l'effet étant proportionnel à la dérivée de l'entraînement par rapport à la distance). C'est de cette façon que l'effet Lense-Thirring a été testé par Gravity Probe B. Mais on pourrait imaginer de le tester plus directement, par exemple par une étude fine de l'effet Shapiro, qui doit être légèrement dissymétrique dans le cas d'un corps en rotation rapide.

L'effet Lense-Thirring nous permet de mieux comprendre comment s'applique le principe de Mach (ou plus précisément : Mach3). Pour un observateur distant, ce sont les variations de la vitesse de la lumière, en fonction du champ gravitationnel et de la direction de propagation, qui permettent de bien cerner le problème. La distribution des masses intervient, bien sûr, mais leurs déplacements jouent aussi (par l'entraînement qui en résulte), pour déterminer, en chaque point de l'espace-temps, quels sont les repères inertiels.

En fait, on pourrait distinguer deux effets Lense-Thirring : l'un intégral (les repères inertiels, en un point donné, sont déterminés - et orientés - en fonction de la distribution des masses et de leurs vitesses), l'autre différentiel (c'est la différence d'entraînement entre le haut et le bas d'un satellite qui exerce un couple sur le gyroscope). C'est l'effet Lense-Thirring différentiel

qui a été testé par Gravity Probe B.

Ce qu'on retiendra, c'est que la notion d'entraînement des référentiels découle très naturellement des idées qui sont à l'origine de notre étude. Mais cet effet est difficile à chiffrer, car on ne peut pas le décrire entièrement à l'aide du modèle incomplet que nous avons présenté jusqu'ici : il ne suffit plus de raisonner sur une masse unique immobile ; il est nécessaire d'étudier de quelle façon se combinent les attractions de plusieurs corps : nous en reparlerons. L'effet Lense-Thirring se situe à la limite des possibilités techniques actuelles, mais on peut penser que, dans l'avenir, il sera l'une des clés de l'étude fine de la gravitation.

38 Effet Nordtvedt

Vous ne connaissez pas l'effet Nordtvedt ? Pas d'affolement : cet effet n'existe pas ! Il a été imaginé par le physicien Nordtvedt pour mettre en évidence une différence éventuelle entre masse inerte et masse pesante, par l'observation de l'orbite de la Lune. C'est en quelque sorte la contrepartie astronomique des expériences d'Eötvös, dont nous avons déjà parlé. Mais les expériences d'Eötvös avaient pour but de détecter des différences liées à la composition chimique des corps, tandis que l'effet Nordtvedt est censé détecter des différences liées à leur énergie gravitationnelle propre.

Nous avons vu que, pour un observateur distant, la masse d'une particule, intervenant dans tout problème de mécanique, est : $m_{dist} = m_0\, ch\frac{w}{c}\, e^{\frac{\Phi}{c^2}}$, puisque c'est elle qui permet d'évaluer l'énergie d'un mobile : $E_{dist} = m_{dist}\, c^2$. Nous la noterons simplement m.
On pourra utiliser l'approximation suivante :
$m \approx m_0.\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \approx m_0 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}.m_0 + \frac{\Phi}{c^2}.m_0$ (avec $\Phi < 0$).
Si $v << c$: $m \approx m_0 + \frac{\Phi}{c^2}.m_0$, avec $\frac{\Phi}{c^2}.m_0 < 0$.
L'énergie gravitationnelle (négative) de cette particule est :
$E_g = (m - m_0)c^2 \approx \Phi.m_0$.

Dans le cas d'un corps non ponctuel (que nous supposerons immobile), E_g est l'énergie de liaison gravitationnelle (négative) des différentes particules qui le composent.

Le calcul de E_g n'a pas une importance essentielle ici, mais nous le proposons quand même, car il permet de bien comprendre cette notion d'énergie

gravitationnelle propre. Imaginons la formation d'une planète par accrétion de particules. Appelons M_0 la somme des masses au repos des particules accrétées (masse ne prenant pas en compte la perte d'énergie due aux liaisons gravitationnelles), et M la masse définitive de la planète, incluant l'énergie gravitationnelle ($M < M_0$, puisque $E_g < 0$). Nous supposons que toutes les particules perdent leur énergie cinétique au cours de l'accrétion. Nous appelons R le rayon définitif de la planète, et ρ sa densité (supposée uniforme). Reconstituons, pas à pas, la formation de la planète, par accrétion de particules de masse dm_0 : la masse m augmente chaque fois d'une quantité dm, inférieure à dm_0, en raison de l'énergie gravitationnelle libérée : $\frac{Gmdm_0}{r}$ (ou $\frac{Gm_0dm_0}{r}$, car $m_0 \approx m$). Le rayon r va croître de 0 à R, la masse m_0 de 0 à M_0, la masse totale m de 0 à M.

$$dm \approx dm_0\left(1 - \frac{Gm}{rc^2}\right) \approx dm_0\left(1 - \frac{Gm_0}{rc^2}\right) \approx 4\pi r^2\rho dr\left(1 - \frac{G}{rc^2}.\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right) \ ;$$

$$dm \approx 4\pi r^2\rho dr - 4\pi r^2\rho.\frac{G}{rc^2}.\frac{4}{3}\pi r^3\rho dr \approx 4\pi\rho d\left(\frac{r^3}{3}\right) - \frac{16}{3}\pi^2\rho^2\frac{G}{c^2}r^4 dr \ ;$$

$$dm \approx 4\pi\rho d\left(\frac{r^3}{3}\right) - \frac{16}{3}\pi^2\rho^2\frac{G}{c^2}d\left(\frac{r^5}{5}\right) \ ;$$

...d'où, en intégrant :

$$M \approx \frac{4}{3}\pi R^3\rho - \frac{16}{3}\pi^2\rho^2\frac{G}{c^2}\frac{R^5}{5} \approx M_0 - \frac{3}{5}.\frac{G}{Rc^2}.\left(\frac{16}{9}\pi^2\rho^2R^6\right) \approx M_0 - \frac{3}{5}.\frac{G}{Rc^2}.M_0^2 \ ;$$

$$M \approx M_0 - \frac{3}{5}.\frac{GM_0^2}{Rc^2}.$$

On a donc : $E_g \approx -\frac{3}{5}.\frac{GM_0^2}{R} \approx -\frac{3}{5}.\frac{GM^2}{R}$.

$$\frac{M}{M_0} \approx 1 - \frac{3}{5}.\frac{GM_0}{Rc^2} \approx 1 - \frac{3}{5}.\frac{GM}{Rc^2}.$$

Pour la Terre : $M \approx 5,97.10^{24}\ kg$, $R \approx 6\ 370\ 000\ m$, donc $\frac{3}{5}.\frac{GM}{Rc^2} \approx 4,6.10^{-10}$, donc $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Terre} \approx 1\ -\ 4,6.10^{-10}$;
pour la Lune : $M \approx 7,35.10^{22}\ kg$, $R \approx 1\ 736\ 000\ m$, donc $\frac{3}{5}.\frac{GM}{Rc^2} \approx 2.10^{-11}$, donc $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Lune} \approx 1\ -\ 2.10^{-11}$.
La différence entre ces deux quotients $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Terre}$ et $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Lune}$ est de l'ordre de $4,4.10^{-10}$.

Considérons maintenant un corps céleste (par exemple une planète) de masse pesante M_p et de masse inerte M_i. Selon la théorie de Newton, la force

exercée par le Soleil sur ce corps est proportionnelle à M_p, et l'accélération qui en résulte est donc proportionnelle à $\frac{M_p}{M_i}$. L'idée de Nordtvedt est que, si la Terre et la Lune ne possèdent pas le même rapport $\frac{M_p}{M_i}$, alors elles ne répondront pas de la même façon à l'attraction du Soleil, comme si elles subissaient des accélérations légèrement différentes. C'est cette différence de comportement qui devrait, selon Nordtvedt, entraîner une modification de la forme de l'orbite de la Lune autour de la Terre. Cette déformation de l'orbite a pu être calculée avec précision.

L'intérêt de la Lune, dans le cas présent, est que sa distance par rapport à la Terre (et donc la forme exacte de son orbite) sont mesurables, en utilisant des radars (situés sur Terre) et des miroirs, placés à la surface de la Lune par les missions Apollo, avec une précision de l'ordre de 2 cm sur une distance de 385 000 km (soit une précision relative de l'ordre de 5.10^{-11}).

Les mesures effectuées n'ont détecté aucune modification de l'orbite de la Lune, et n'ont donc pas confirmé le calcul de Nordtvedt ; on en conclut que le quotient $\frac{M_p}{M_i}$ est le même pour les deux astres, avec une très bonne précision.

Mais quel rapport y a-t-il entre les masses M_p et M_i (masse pesante et masse inerte) d'une part, M et M_0 (masses incluant, et n'incluant pas, l'énergie gravitationnelle) d'autre part ? C'est simple : si la masse pesante s'identifiait à M_0 et la masse inerte à M (ou l'inverse !), alors les quotients $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Terre}$ et $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Lune}$ ne seraient pas égaux, et la précision des mesures aurait permis de s'en rendre compte, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que les masses pesante et inerte sont toutes les deux égales à M, ou toutes les deux égales à M_0.

Dans l'approche de la gravitation que nous exposons ici, la masse pesante et la masse inerte sont toutes les deux égales à M. En effet, lorsqu'une particule se déplace sur une géodésique, sa masse $m = m_{dist} = m_0 \; ch\frac{w}{c} \; e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ ne varie pas, son énergie totale étant constante ; le produit $ch\frac{w}{c} \; e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ est constant, donc quand l'un des facteurs augmente, l'autre diminue ; quand l'énergie cinétique augmente, l'énergie potentielle diminue (et réciproquement). Imaginons maintenant la formation d'une planète par accrétion. Chaque fois qu'une nouvelle particule est capturée et tombe sur la planète, elle commence par gagner de l'énergie cinétique tout en perdant de l'énergie potentielle, jusqu'à la chute finale. C'est à ce moment que l'équilibre est rompu : l'énergie cinétique de la particule est nécessairement évacuée, d'une manière ou d'une autre, par exemple sous forme de chaleur, puis de rayonnement (du moins pour des

corps froids comme le Terre et la Lune), mais l'énergie potentielle perdue n'est pas récupérée. C'est lorsque la chaleur due à l'impact est rayonnée qu'il y a une perte d'énergie (donc de masse). La masse finale est donc M, et non M_0.

Encore une précision : quelle est la masse au repos de la planète ? Rappelons que M_0 est la somme des masses au repos des particules qui la composent. Mais la masse au repos d'un corps n'est pas égale à la somme des masses au repos de ses composants ! (Voir les explications partielles dans le document Les vitesses en Relativité restreinte.pdf, p. 52-53). Elle dépend de la rapidité relative de ces composants (donc de l'énergie cinétique de l'ensemble), mais aussi de leur énergie potentielle (puisque l'énergie cinétique peut se transformer en énergie potentielle, et réciproquement). Il en résulte que la quantité M_0, que nous avons fait intervenir dans notre calcul, n'a aucune signification physique : la masse au repos de la planète (pour un observateur distant) est égale à M, et non à M_0. Il n'existe en fait qu'une sorte de masse (pour cet observateur) : $M_p = M_i = M$, qu'on peut appeler, au choix, masse pesante, masse inerte ou masse au repos.

39 L'anomalie Pioneer

L'anomalie Pioneer est un problème qui a été soulevé en 1998 par les techniciens du Jet Propulsion Laboratory ; elle concerne les sondes spatiales Pioneer 10 et 11. Après avoir dépassé l'orbite de Saturne, ces deux sondes, placées sur des orbites hyperboliques (leur vitesse étant supérieure à la vitesse de libération du système solaire), ont pu être suivies encore pendant plusieurs années, et leur vitesse a été mesurée régulièrement par effet Doppler. C'est alors qu'une légère différence par rapport aux lois de la gravitation est apparue. Toutes les corrections dues à des effets connus (comme la pression de la lumière solaire) ayant été effectuées, une accélération résiduelle inexpliquée a été mise en évidence, et s'est confirmée au cours des années. Il s'agit d'une accélération de l'ordre de $(8,74 \pm 1,33) \times 10^{-10}\ m/s^2$, dirigée vers la Terre (ou vers le Soleil, ces deux directions n'étant pas distinguées par l'effet Doppler).

De nombreuses explications ont été avancées, les unes très classiques ou même triviales (par exemple une fuite de carburant), d'autres révolutionnaires (modification de la loi de la gravitation).

Dans cette situation, la métrique de Ni, étant équivalente à celle de

Schwarzschild à une grande distance du Soleil, ne pouvait apporter aucun secours ; certains chercheurs se sont alors tournés vers la théorie MOND, qui prévoit une décroissance plus faible de l'attraction solaire à grande distance.

Mais une publication de mars 2011 semble apporter une solution correcte à ce problème. Cette explication se base sur la diffusion de la chaleur produite par les générateurs, chaleur qui est ensuite évacuée dans l'espace sous forme de rayonnement infrarouge. Si ce rayonnement était isotrope, il n'en résulterait aucune modification de la vitesse ; mais il se trouve qu'il subit des réflexions sur les parois de la sonde, et plus particulièrement sur le dos de l'antenne parabolique utilisée pour les télécommunications. Cette antenne étant dirigée vers l'arrière (vers la Terre), son dos est dirigé vers l'avant ; c'est pour cette raison que le rayonnement infrarouge réfléchi est dirigé préférentiellement vers l'avant de la sonde, entraînant, par effet de recul, une très légère décélération de celle-ci. Le calcul, très délicat, donne un résultat cohérent avec ce qui est observé. De plus, l'anomalie semble s'atténuer légèrement avec les années, en liaison avec une baisse de puissance des générateurs.

Cette mésaventure nous apprend que des problèmes très classiques, mais complexes, peuvent être particulièremant difficiles à résoudre, et que les solutions les plus "exotiques" (et médiatiques) ne sont pas nécessairement les meilleures.

40 Conclusion ... provisoire !

L'usage est de placer la conclusion à la fin d'un travail ; mais on est libre de considérer que notre incursion dans le domaine de la gravitation relativiste se termine ici. Plus exactement, nous disposons d'un certain nombre de certitudes étayées par de nombreuses observations : elles concernent le ralentissement des horloges dans un champ gravitationnel, la déviation de la lumière par les objets massifs (et les mirages gravitationnels), la précession du périhélie des orbites elliptiques, l'effet Shapiro, la précession géodétique... Nous pouvons considérer tous ces effets (indiscutables) comme le premier palier de la gravitation relativiste. Nous savons maintenant qu'on peut accéder à ce premier palier (c'est-à-dire expliquer tous ces effets) d'une manière très directe, en faisant une synthèse aussi simple que possible de la gravitation newtonienne et de la relativité restreinte. On croit trop souvent que seule la relativité générale permet d'expliquer cette multitude de phénomènes : c'est inexact ; on sait aujourd'hui qu'il existe d'autres théories qui les ex-

pliquent aussi bien, et parfois avec une désarmante facilité ! Mais la relativité générale permet d'aller bien au-delà de cette plate-forme : en effet, elle ne donne pas seulement des réponses aux questions qui viennent d'être évoquées, mais elle est capable aussi de gérer des situations bien plus complexes, elle prévoit l'existence d'ondes gravitationnelles, dont elle décrit la nature et le comportement jusque dans les moindres détails, elle dévoile les étonnantes propriétés des trous noirs et fixe le cadre du big bang... Alors, pourquoi ne pas adopter cette théorie, si elle permet d'aller plus loin que les autres ? C'est parce-que des questions se posent, justement, concernant ce "second palier" de la gravitation relativiste : les ondes gravitationnelles n'ont pas encore été observées directement, mais le seront peut-être un jour ; les trous noirs, eux, sont de plus en plus souvent "observés" -mais s'agit-il de vrais trous noirs ?-, le big bang est familier à chacun de nous, mais personne ne sait s'il a eu lieu...

A l'intention des lecteurs qui désireraient nous accompagner dans un rapide tour d'horizon, nous allons examiner quelques problèmes qui devront être résolus pour ouvrir l'accès au second palier de la gravitation, et nous préciserons, éventuellement, l'éclairage apporté par la métrique triviale de Ni. A partir d'ici, nous quittons le domaine des certitudes bien établies, pour aborder des sujets qui font encore débat ; nous ne pourrons plus exposer des vérités de manière affirmative, mais seulement poser des questions.

41 Existe-t-il des repères privilégiés ?

Depuis le début, nous avons admis l'invariance locale de la distance élémentaire d'univers (ou de la distance spatio-temporelle, ou du temps propre) ds, ce qui signifie que deux observateurs situés au même point de l'espace-temps, mais animés de vitesses différentes, ont toujours la même évaluation de ds ; ceci implique la validité locale de la matrice de Lorentz. D'autre part, nous avons mis en évidence une "matrice de changement de potentiel", qui exprime la transmission des informations entre deux observateurs immobiles, situés dans des potentiels gravitationnels différents. La manipulation simultanée de ces deux types de matrices pose des problèmes de compatibilité. Par exemple, si P est une matrice de changement de potentiel et L_1 une matrice de Lorentz, elles ne commutent pas : $L_1.P \neq P.L_1$. De plus, il est impossible de trouver une matrice de Lorentz L_2 telle que $L_2.P = P.L_1$. On pourrait être tenté de modifier la matrice P, pour la rendre compatible avec les matrices de Lorentz, mais on se rend vite compte que c'est impossible. Pourtant, au point ou nous sommes arrivés, nous ne pouvons pas renoncer aux matrices

de changement de potentiel, sur lesquelles se base toute notre étude, et qui nous ont donné satisfaction de manière inespérée. Que faire ?

Imaginons par exemple, dans le champ gravitationnel du Soleil, deux observateurs O_1 et O_2 alignés avec le Soleil (sur un axe qui sera l'axe des x), animés des rapidités $-w_1$ et w_2. Pour simplifier le calcul, nous supposerons les rapidités dirigées selon l'axe des x ; mais on pourrait s'émanciper de cette contrainte. Pour passer de l'observateur O_1 à l'observateur O_2, imaginons deux autres observateurs I_1 et I_2, immobiles par rapport au Soleil, le premier situé au même point de l'espace-temps que O_1, le second au même point que O_2. Nous allons passer successivement de O_1 à I_1, de I_1 à I_2, puis de I_2 à O_2, donc nous allons composer une matrice de Lorentz (rapidité relative : w_1), une matrice de changement de potentiel (différence de potentiel : $\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi$), et une autre matrice de Lorentz (rapidité relative : w_2). Calculons la matrice composée :

$$\begin{pmatrix} ch\frac{w_2}{c} & -sh\frac{w_2}{c} & 0 & 0 \\ -sh\frac{w_2}{c} & ch\frac{w_2}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{\Phi}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch\frac{w_1}{c} & -sh\frac{w_1}{c} & 0 & 0 \\ -sh\frac{w_1}{c} & ch\frac{w_1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{\Phi}{c^2}}ch\frac{w_2}{c}ch\frac{w_1}{c} + e^{\frac{\Phi}{c^2}}sh\frac{w_2}{c}sh\frac{w_1}{c} & -e^{-\frac{\Phi}{c^2}}sh\frac{w_2}{c}ch\frac{w_1}{c} - e^{\frac{\Phi}{c^2}}ch\frac{w_2}{c}sh\frac{w_1}{c} & 0 & 0 \\ -e^{-\frac{\Phi}{c^2}}ch\frac{w_2}{c}sh\frac{w_1}{c} - e^{\frac{\Phi}{c^2}}sh\frac{w_2}{c}ch\frac{w_1}{c} & e^{-\frac{\Phi}{c^2}}sh\frac{w_2}{c}sh\frac{w_1}{c} + e^{\frac{\Phi}{c^2}}ch\frac{w_2}{c}ch\frac{w_1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, cette matrice n'est ni une matrice de Lorentz, ni une matrice de changement de potentiel : c'est une matrice plus complexe, combinant les deux transformations.

Supposons que les observateurs O_1 et O_2, en comparant leurs observations, soient en mesure d'établir leur matrice de changement de repère, sous la forme ci-dessus. Ecrivons-la de manière simplifiée :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} \end{pmatrix}.$$

Dans cette matrice, on a :

$$\alpha = e^{-\frac{\Phi}{c^2}} ch\frac{w_2}{c} ch\frac{w_1}{c} + e^{\frac{\Phi}{c^2}} sh\frac{w_2}{c} sh\frac{w_1}{c} \ ;$$
$$\beta = -e^{-\frac{\Phi}{c^2}} ch\frac{w_2}{c} sh\frac{w_1}{c} - e^{\frac{\Phi}{c^2}} sh\frac{w_2}{c} ch\frac{w_1}{c} \ ;$$
$$\gamma = -e^{-\frac{\Phi}{c^2}} sh\frac{w_2}{c} ch\frac{w_1}{c} - e^{\frac{\Phi}{c^2}} ch\frac{w_2}{c} sh\frac{w_1}{c} \ ;$$
$$\delta = e^{-\frac{\Phi}{c^2}} sh\frac{w_2}{c} sh\frac{w_1}{c} + e^{\frac{\Phi}{c^2}} ch\frac{w_2}{c} ch\frac{w_1}{c}.$$

Connaissant les quatre coefficients α, β, γ et δ, nos deux observateurs vont-ils pouvoir retrouver les valeurs de Φ, w_1 et w_2 ? La réponse est : oui. En effet, on peut établir facilement les relations suivantes :

$$2\ ch\frac{2\Phi}{c^2} = e^{\frac{2\Phi}{c^2}} + e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 \ ;$$

$$ch\frac{w_1}{c} = \sqrt{\frac{e^{\frac{2\Phi}{c^2}} - (\alpha^2 - \gamma^2)}{e^{\frac{2\Phi}{c^2}} - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}}} \text{ et } sh\frac{w_1}{c} = \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} - (\alpha^2 - \gamma^2)}{e^{\frac{2\Phi}{c^2}} - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}}} \ ;$$

$$ch\frac{w_2}{c} = \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} - (\delta^2 - \beta^2)}{e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} - e^{\frac{2\Phi}{c^2}}}} \text{ et } sh\frac{w_2}{c} = \sqrt{\frac{e^{\frac{2\Phi}{c^2}} - (\delta^2 - \beta^2)}{e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} - e^{\frac{2\Phi}{c^2}}}}.$$

Nos deux observateurs vont donc être en mesure de déterminer d'abord leur différence de potentiel Φ, puis leurs rapidités absolues w_1 et w_2.

Ceci nous impose d'accorder aux repères "immobiles" un rôle privilégié, et d'attribuer à la notion d'immobilité (ou, plus exactement, d'"immobilité gravitationnelle") une signification absolue : les observateurs sont en mesure de déterminer à quelle vitesse ils se déplacent par rapport au Soleil, sans avoir à observer le Soleil lui-même ; autrement dit, ils sont en mesure de déterminer à quelle vitesse ils se déplacent par rapport au champ gravitationnel du Soleil. Ceci signifie que le champ gravitationnel du Soleil "garde en mémoire", en chaque point, la vitesse du Soleil ; nous en reparlerons dans la section suivante.

Rappelons que la notion d'immobilité absolue, qui semblait définitivement écartée par la relativité restreinte, a été réhabilitée par l'étude du rayonnement cosmologique fossile : si ce rayonnement est isotrope pour un observateur, il ne peut pas l'être pour un autre observateur, situé au même point, mais en mouvement par rapport au premier (en raison de l'effet Doppler, de l'aberration de la lumière, etc.), ce qui permet de définir une "immobilité

cosmologique".

Le même raisonnement peut s'appliquer à la densité de galaxies lointaines sur le fond du ciel : si, pour un observateur donné, cette densité est uniforme sur l'ensemble du ciel, alors elle ne peut pas être uniforme pour un second observateur en mouvement par rapport au premier. La raison est encore l'aberration de la lumière. La répartition des galaxies dans l'univers permet donc, elle aussi, de définir une "immobilité par rapport à l'ensemble des galaxies".

L'effet Casimir permet de définir, d'une autre manière, une certaine forme d'immobilité (qu'on pourrait appeler "immobilité par rapport au vide", ou "immobilité Casimir") : si la pression du vide est équilibrée dans un repère donné (ce qui signifie que, dans ce repère, les pressions de sens inverse s'équilibrent), alors elle ne peut pas être équilibrée dans un autre repère en mouvement par rapport au premier. Comme on l'a souvent dit, le vide au sens de Casimir marque, d'une certaine façon, le retour de l'éther... Mais cet effet n'était pas connu à l'époque où Einstein travaillait sur la relativité générale : sur la lancée de la relativité restreinte, il semblait impossible d'envisager une "immobilité gravitationnelle" ; on pouvait même considérer cette notion comme un retour en arrière, en contradiction avec la relativité restreinte... C'est peut-être l'une des raisons pour lesquelles Einstein a choisi de tourner le dos à la notion de potentiel, pour faire porter la totalité de l'information par le tenseur de courbure.

Il existe d'ailleurs une autre notion qui semblait enterrée par la relativité restreinte : c'est le temps absolu. Il a refait surface sous la forme du "temps cosmologique", notion qui s'appuie sur la théorie du big bang, elle-même soutenue par la relativité...

Mais la notion d'immobilité gravitationnelle permet, elle aussi, de définir une simultanéité absolue, donc un temps absolu. En effet, si deux événements sont simultanés pour un observateur gravitationnellement immobile ($\Delta t = 0$), alors, en utilisant la matrice de changement de potentiel, on prouve de manière triviale que $\Delta t' = 0$, ce qui signifie que ces deux événements seront aussi simultanés pour tout autre observateur gravitationnellement immobile, situé dans un potentiel quelconque ; mais, bien entendu, ils ne seront pas simultanés pour un observateur en mouvement.

Tout ceci pourrait sembler, à première vue, en contradiction avec la relativité restreinte ; mais ce n'est pas du tout le cas, comme nous allons le voir.

42 Comment les champs se composent-ils ?

En gravitation newtonienne, chaque corps matériel produit un champ gravitationnel, qu'on peut considérer comme un champ d'accélérations ; ce champ correspond, au signe près, au gradient du potentiel newtonien Φ. Le champ global s'obtient en sommant les champs partiels (produits par les différentes particules élémentaires) : les vecteurs accélération s'additionnent selon l'addition vectorielle tridimensionnelle classique, et les potentiels selon l'addition scalaire.

En gravitation relativiste, il peut sembler naturel d'utiliser la même technique, en remplaçant le vecteur accélération (tridimensionnel) par le quadrivecteur accélération (égal au quadrigradient signé), que nous avons déjà rencontré dans la section sur la version cartésienne des géodésiques :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{c\partial t}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right).$$

La première idée qui vient à l'esprit est donc de calculer le champ produit par chaque particule de matière (en se plaçant dans un repère lié à cette particule, et en utilisant sa masse au repos, comme nous l'avons fait pour le Soleil), puis de procéder à la sommation. Mais ceci soulève un problème : si la particule est un photon, d'une part sa masse au repos est nulle, d'autre part il est impossible, par les règles habituelles de changement de repère, de se placer dans un repère se déplaçant à la vitesse de la lumière. On pourrait penser que ce problème, ne concernant que des particules de masse au repos nulle, est négligeable. Mais c'est faux. Voici pourquoi.

Imaginons une sphère creuse, de masse négligeable, tapissée intérieurement d'une couche parfaitement réfléchissante. Imaginons, de plus, un très grand nombre de photons, piégés à l'intérieur de cette sphère, réfléchis par la paroi. Chaque photon a, bien entendu, une masse au repos nulle. Mais l'ensemble de ces photons a une masse au repos non nulle ! En effet, chaque photon P_i a une énergie $E_i = h\nu_i$ et une impulsion $\vec{p_i} = \frac{h\nu_i}{c}.\vec{u_i}$, où $\vec{u_i}$ est un vecteur unitaire indiquant la direction de propagation du photon P_i. Le quadrivecteur résultant a une énergie $E = \sum_i E_i$ et une impulsion $\vec{p} = \sum_i \vec{p_i}$. Si les vitesses sont réparties de manière aléatoire, l'impulsion résultante $\vec{p}$ est

proche de $\vec{0}$; mais l'énergie résultante E ne s'annule pas. Et le corps composé de l'ensemble des photons a pour masse au repos : $m_0 = \frac{E}{c^2}$. Ceci signifie qu'un ensemble composé d'éléments de masses au repos nulles peut avoir une masse au repos non nulle. D'après la première partie de notre travail, tout ce qui a été dit sur le "Soleil" peut s'appliquer à cet objet composé de photons (ou autres particules de masses au repos nulles), car c'est un objet massif, qui doit se comporter, vis-à-vis de la gravitation, comme tout autre objet massif. Par conséquent, le comportement de cet objet de masse au repos non nulle doit pouvoir se déduire des comportements de ses parties, qui ont des masses au repos nulles. La masse au repos ne peut pas être la clé de la gravitation ! Il faut, au minimum, faire appel à la masse maupertuisienne (celle d'un photon P_i n'est pas nulle : elle est égale à $\frac{E_i}{c^2}$). Mais, par changement de repère, la transformation de la masse maupertuisienne fait intervenir toutes les composantes du quadrivecteur impulsion-énergie. Dans une théorie complète de la gravitation, il est nécessaire d'utiliser ce quadrivecteur dans son intégralité, avec toutes ses composantes. Dans la théorie de Newton, la masse au repos est la notion fondamentale ; c'est une quantité additive : la masse au repos d'un corps est égale à la somme des masses au repos de ses parties. Mais dans une théorie relativiste, la masse au repos n'est plus additive : c'est le quadrivecteur impulsion-énergie qui est additif, et c'est donc à lui que doit revenir le rôle fondamental.

Mais il existe une seconde différence importante entre la gravitation de Newton et la gravitation relativiste : pour Newton, un corps matériel de masse m_0 produit directement un champ d'accélérations (d'intensité proportionnelle à m_0, et inversement proportionnelle au carré de la distance) ; en gravitation relativiste, le corps matériel produit une modification de l'espace-temps, qui, dans un second temps, influe sur le mouvement des mobiles.

Traduisons ceci en termes d'information. Plaçons-nous en un point P. Un messager apporte une information signalant un corps matériel, à la distance r. Comment le messager va-t-il formuler son message ?
- Si ce messager est newtonien, il va dire : le corps a telle masse au repos, il se trouve dans telle direction, à telle distance ; veuillez mettre à jour le vecteur accélération en conséquence ;
- si le messager parle le langage de la gravitation relativiste, il va dire : le corps a telle impulsion-énergie, il se trouve à telle distance, veuillez mettre à jour vos règles et vos horloges.

Ceci nous suggère d'introduire une notion nouvelle : le quadrivecteur potentiel.

Un quadrivecteur impulsion-énergie (évalué localement) peut s'écrire sous la forme :

$$(E,\ c\vec{p}) = m_0c^2\ e^{\frac{\vec{w}}{c}} = m_0c^2 \left(ch\frac{\vec{w}}{c} + sh\frac{\vec{w}}{c} \right)$$

où $w = ||\vec{w}||$, $ch\frac{\vec{w}}{c} = ch\frac{w}{c}$, $sh\frac{\vec{w}}{c} = sh\frac{w}{c}.\frac{\vec{w}}{w}$, et $e^{\frac{\vec{w}}{c}} = ch\frac{\vec{w}}{c} + sh\frac{\vec{w}}{c}$ - voir les explications dans le document Les vitesses en Relativité restreinte.pdf, p. 55-56.

De même, on peut penser que le champ gravitationnel produit par une masse m_0 doit pouvoir s'écrire :

$$\vec{\Phi} = -\frac{G}{rc^2}(E,\ c\vec{p}) = \Phi\ e^{\frac{\vec{w}}{c}} = \Phi \left(ch\frac{\vec{w}}{c} + sh\frac{\vec{w}}{c} \right)$$

où $\Phi = -\frac{Gm_0}{r}$.

Le quadrivecteur potentiel ainsi défini comporte une partie scalaire, analogue à une énergie : $\Phi.ch\frac{\vec{w}}{c} = \Phi.ch\frac{w}{c} = -\frac{G}{rc^2}.E$, et une partie vectorielle (tridimensionnelle), analogue à une impulsion : $\Phi.sh\frac{\vec{w}}{c} = -\frac{G}{rc^2}.c\vec{p}$.

Bien entendu, l'appréciation de $\vec{w}$ va dépendre de l'observateur. Dans la première partie de notre travail (étude du système solaire), les observateurs locaux et distants étaient immobiles par rapport au Soleil ; pour ces observateurs particuliers, la rapidité du Soleil était donc : $\vec{w} = \vec{0}$; en remplaçant, dans la formule ci-dessus, m par M (masse du Soleil évaluée par un observateur distant) et $\vec{w}$ par $\vec{0}$, on voit que la partie vectorielle du champ gravitationnel s'annule ; celui-ci se réduit à sa partie scalaire : $\Phi = -\frac{GM}{r}$.

L'intérêt de ce quadrivecteur est nul s'il n'est pas additif, mais il est considérable s'il est additif. Je ne suis pas en mesure de prouver qu'il possède cette propriété ; mais il existe un champ de recherche idéal pour tester cette idée : c'est l'observation et la modélisation de la rotation des galaxies.

Du point de vue mathématique, un quadrivecteur lorentzien, de coordonnées $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$, est dit "de type temps" (ou énergie) si $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, "de type espace" (ou impulsion) si $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$; il est positif si $\alpha > 0$, négatif si $\alpha < 0$. La somme de deux (ou plusieurs) quadrivecteurs de type temps de même signe est toujours de type temps, et de même signe - mais, attention, cette propriété ne s'applique pas aux quadrivecteurs de type espace : les quadrivecteurs de type temps, de même signe, forment un sous-ensemble stable par addition, mais pas les quadrivecteurs de type espace ! D'autre part,

le transformé, par la transformation de Lorentz, d'un quadrivecteur de type temps, de signe quelconque, est aussi de type temps, et de même signe. De plus, un quadrivecteur de type temps peut toujours s'écrire sous la forme : $x.e^{\frac{\vec{w}}{c}} = x.\left(ch\frac{\vec{w}}{c} + sh\frac{\vec{w}}{c}\right)$, où $x.ch\frac{w}{c} = \alpha$ (scalaire) et $x.sh\frac{\vec{w}}{c} = (\beta,\ \gamma,\ \delta)$ (vecteur tridimensionnel). On peut montrer facilement que le quadrivecteur potentiel, tel que nous l'avons défini, est un quadrivecteur lorentzien négatif de type temps. En effet, dans un repère lié à une particule donnée, le quadrivecteur créé par cette particule est de la forme $\left(-\frac{Gm}{r},\ 0,\ 0,\ 0\right)$; il vérifie donc trivialement les propriétés annoncées, et ces propriétés se conservent lorsque la particule est mobile par rapport à l'observateur (Lorentz-invariance) ; de plus, ces propriétés s'étendent au champ créé par deux particules, ou par un nombre quelconque de particules.

Démontrons la propriété la moins évidente : la stabilité du sous-ensemble des quadrivecteurs de type temps (et de même signe) pour l'addition. Choisissons par exemple deux quadrivecteurs $(a_1,\ \vec{u_1})$ et $(a_2,\ \vec{u_2})$ (où a_1 et a_2 sont des scalaires de même signe, et $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs tridimensionnels, vérifiant : $a_1^2 > ||\vec{u_1}||^2$ (donc $|a_1| > ||\vec{u_1}||$) et $a_2^2 > ||\vec{u_2}||^2$ (donc $|a_2| > ||\vec{u_2}||$), et montrons que $(a_1 + a_2)^2 > ||(\vec{u_1} + \vec{u_2})||^2$. Notons θ l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. On a :

$$||(\vec{u_1} + \vec{u_2})||^2 = ||\vec{u_1}||^2 + 2||\vec{u_1}||.||\vec{u_2}||cos\ \theta + ||\vec{u_2}||^2\ ;$$

$$||(\vec{u_1} + \vec{u_2})||^2 < ||\vec{u_1}||^2 + 2||\vec{u_1}||.||\vec{u_2}|| + ||\vec{u_2}||^2\ ;$$

$$||(\vec{u_1} + \vec{u_2})||^2 < |a_1|^2 + 2|a_1|.|a_2| + |a_2|^2 = (|a_1| + |a_2|)^2.$$

Comme a_1 et a_2 sont de même signe, on a évidemment :

$$(|a_1| + |a_2|)^2 = (|a_1 + a_2|)^2 = (a_1 + a_2)^2.$$

D'autre part, on peut vérifier facilement que le sous-ensemble des quadrivecteurs de type espace (et de même signe) n'est pas stable pour l'addition. Considérons par exemple les quadrivecteurs $(a,\ \vec{u})$ et $(a,\ -\vec{u})$, avec $0 < a < ||\vec{u}||$. Ils sont de type espace, mais leur somme, $(2a,\ \vec{0})$, est de type temps.

Montrons également qu'un quadrivecteur de type temps $(a,\ \vec{u})$ (où a est un scalaire, et $\vec{u}$ un vecteur tridimensionnel, tels que $|a| > ||\vec{u}||$) peut s'écrire sous la forme : $x.e^{\frac{\vec{w}}{c}} = x.ch\frac{\vec{w}}{c} + x.sh\frac{\vec{w}}{c}$. On doit avoir : $a = x.ch\frac{\vec{w}}{c}$ et $\vec{u} = x.sh\frac{\vec{w}}{c}$, donc $a^2 - ||\vec{u}||^2 = x^2.ch^2\frac{\vec{w}}{c} - x^2.sh^2\frac{\vec{w}}{c} = x^2$ et $\frac{\vec{v}}{c} = th\frac{\vec{w}}{c} = \frac{sh\frac{\vec{w}}{c}}{ch\frac{\vec{w}}{c}} = \frac{\vec{u}}{a}$. Il est donc

facile de calculer x $\left(x = \pm\sqrt{a^2 - ||\vec{u}||^2} = a\sqrt{1 - \frac{||\vec{u}||^2}{a^2}}\right)$ et $\vec{v}$ (ou $\vec{w}$).

Considérons le quadrivecteur potentiel créé, en un point donné, par un ensemble de corps de masses m_i ; supposons qu'il s'obtienne en additionnant les quadrivecteur d'entraînement créés par chacun des corps en jeu (hypothèse à discuter !). Le quadrivecteur résultant (pour un observateur local mobile) sera de la forme : $x.\left(ch\frac{\vec{w}}{c} + sh\frac{\vec{w}}{c}\right)$, où x est un scalaire, et $\vec{w}$ une rapidité (qu'on pourrait appeler : rapidité du champ, au point étudié, évaluée par l'observateur qui a été désigné). Imaginons maintenant un autre observateur animé, par rapport au précédent, d'une rapidité précisément égale à $\vec{w}$; pour ce second observateur, la rapidité du champ va s'annuler, donc le quadrivecteur va se réduire à sa partie scalaire : x. Ce second observateur sera "immobile" par rapport au champ. Si nous raisonnons maintenant sur le champ global créé par l'ensemble des masses de l'univers, il sera possible de définir, de la même façon, une "immobilité gravitationnelle" par rapport à ce champ global. Comme on le voit, l'idée de concevoir le champ gravitationnel comme un quadrivecteur analogue à une impulsion-énergie nous conduit automatiquement à la notion d'immobilité gravitationnelle : un corps sera dit immobile par rapport au champ gravitationnel dans lequel il est plongé, si, dans son repère propre, la composante vectorielle ("impulsion") de ce champ s'annule ; le champ se réduit alors à sa composante scalaire ("énergie").

On voit donc que cette notion d'une immobilité gravitationnelle, résultant de la nature quadrivectorielle du potentiel, n'est pas du tout en contradiction avec la relativité restreinte : bien au contraire, elle découle directement de la Lorentz-invariance et de l'additivité du quadrivecteur considéré.

Si ces idées se révélaient exactes, nous serions amenés à tourner le dos radicalement à la relativité générale, tout en nous rapprochant, d'une certaine manière, de la relativité restreinte.

Voyons maintenant de quelle façon cette notion d'"immobilité gravitationnelle" éclaire le phénomène d'entraînement des référentiels (effet Lense-Thirring). Pour un observateur gravitationnellement immobile, le champ (en termes de quadrivecteurs d'entraînement) produit par l'ensemble de l'univers est de la forme $a.e^{\vec{0}}$ $(a > 0)$; le quadrivecteur potentiel produit par un corps M donné est $b.e^{\frac{\vec{w}}{c}}$, avec $b = \frac{Gm}{r}$. En supposant que ces quadrivecteurs soient additifs, la résultante sera $a.e^{\vec{0}} + b.e^{\frac{\vec{w}}{c}} = A.e^{\frac{\vec{W}}{c}}$. On peut facilement calculer

A et $\vec{W}$, puisque $A.ch\frac{\vec{W}}{c} = a + b.ch\frac{\vec{w}}{c}$ et $A.sh\frac{\vec{W}}{c} = b.sh\frac{\vec{w}}{c}$:

$$A^2 = \left(A.ch\frac{\vec{W}}{c}\right)^2 - \left(A.sh\frac{\vec{W}}{c}\right)^2 = \left(a + b.ch\frac{\vec{w}}{c}\right)^2 - \left(b.sh\frac{\vec{w}}{c}\right)^2 \ ;$$

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab.ch\frac{\vec{w}}{c} \ ;$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.ch\frac{\vec{w}}{c}} \ ;$$

$$\frac{\vec{V}}{c} = th\frac{\vec{W}}{c} = \frac{sh\frac{\vec{W}}{c}}{ch\frac{\vec{W}}{c}} = \frac{b.sh\frac{\vec{w}}{c}}{a + b.ch\frac{\vec{w}}{c}}.$$

Ce vecteur $\vec{V}$ correspond à l'entraînement des référentiels par le corps M considéré.

Si $|b| >> |a|$, on a : $\frac{\vec{V}}{c} \approx \frac{b.sh\frac{\vec{w}}{c}}{b.ch\frac{\vec{w}}{c}} = th\frac{\vec{w}}{c} = \frac{\vec{v}}{c}$. Ceci signifie que, si le corps M est isolé dans l'univers ($a = 0$), alors tous les repères inertiels subissent un entraînement égal à la vitesse $\vec{v}$ du corps M ; autrement dit, ce corps, à lui seul, définit l'immobilité gravitationnelle dans l'ensemble de l'univers. Ceci est conforme au principe de Mach, selon lequel un corps isolé dans l'univers est nécessairement immobile. Si, au contraire, $a \neq 0$, on aura (pour r assez grand) : $|b| = \frac{Gm}{r} << |a|$, donc $\frac{\vec{V}}{c} \approx \frac{b.sh\frac{\vec{w}}{c}}{a} = \frac{Gm \ sh\frac{\vec{w}}{c}}{r.|a|}$. L'entraînement tend très vite vers $\vec{0}$ quand r croît. (Bien sûr, quand r tend vers 0, $|b|$ devient supérieur à $|a|$, donc, comme précédemment, $\vec{V}$ tend vers $\vec{v}$.)

Un cas particulièrement intéressant à étudier est celui où $|b|$ n'est pas négligeable par rapport à $|a|$. Ceci pourra se produire soit près de la surface d'un astre particulièrement compact ("trou noir", étoile à neutrons), soit à l'intérieur d'une galaxie ou d'un amas globulaire, où l'action gravitationnelle des étoiles "proches" peut éventuellement égaler ou dépasser celle de l'ensemble des astres lointains (autres galaxies).

Nous sommes donc amenés à proposer cette hypothèse : alors qu'en gravitation newtonienne, un corps matériel produit un potentiel scalaire en $\frac{1}{r}$, il se pourrait qu'en gravitation relativiste il s'agisse d'un champ d'information de type impulsion-énergie. Cette impulsion-énergie est celle du corps en question, affectée d'un coefficient (également en $\frac{1}{r}$). Remarquons que ce quadrivecteur n'a rien à voir avec le vecteur accélération ; mais il permet de définir d'une part des repères gravitationnellement immobiles (repères pour

lesquels la partie "impulsion" du quadrivecteur s'annule), d'autre part un potentiel scalaire (correspondant au module du quadrivecteur), qui, dans un second temps, modifie les règles et les horloges locales ; celles-ci, dans un troisième temps, influent sur les trajectoires des mobiles.

Ce qui fait l'intérêt de cette hypothèse, c'est qu'elle pourra être réfutée (ou corrigée) par sa confrontation avec le problème de la rotation des galaxies.

43 La courbure est-elle une illusion ?

Au point où nous en sommes, il me semble important de rappeler que toute la première partie de notre travail (l'étude du champ gravitationnel du Soleil) reposait sur la dualité des points de vue de l'observateur distant et de l'observateur local : pour le premier, l'espace-temps est euclidien, et la vitesse de la lumière est variable en fonction du champ gravitationnel ; pour le second, la vitesse de la lumière est constante, et l'espace-temps est courbe (ou, plus exactement, la synthèse des différentes observations locales conduit à une courbure). Il était permis de considérer cette courbure comme une illusion, due à la modification des règles et des horloges des observateurs locaux par le champ gravitationnel ; mais il était possible aussi d'envisager le point de vue local comme le seul légitime, et le point de vue distant comme une construction secondaire et abstraite. Dans une situation complexe, mettant en jeu un ensemble de corps mobiles en interaction gravitationnelle, l'observateur distant sera-t-il encore en mesure de "fabriquer" cet espace-temps euclidien qui sert de cadre à sa représentation de l'univers ? Ou bien sera-t-il obligé, comme les observateurs locaux lorsqu'ils veulent recoller leurs cartes locales, d'envisager un cadre courbe ?

On peut trouver un élément de réponse dans la section précédente : nous avons envisagé la possibilité que le quadrivecteur impulsion-énergie d'un corps quelconque puisse être "ressenti" en tout point de l'espace, ce qui suppose la transmission d'une information de type vectoriel (ceci n'est pas très surprenant, puisque, selon la mécanique quantique, une information de type "spin" peut aussi se transmettre à distance) ; mais cette transmission d'une information vectorielle implique une reconnaissance du parallélisme, donc une géométrie particulièrement simple de l'espace-temps, dans laquelle la notion de direction possède une signification absolue, indépendante du temps et du lieu. Plus précisément, en utilisant la notion de "transport parallèle" dans un espace courbe (espace de Riemann), le calcul conduit à une courbure

nulle. La conservation du quadrivecteur impulsion-énergie (indépendamment du temps et du lieu) suppose un espace-temps euclidien. Dans un espace-temps courbe, cette conservation ne peut être réalisée que localement.

En définitive, nous voyons que rien ne nous interdit de continuer à travailler, comme en mécanique quantique, avec un espace-temps euclidien. La notion de courbure n'est utile qu'à partir du moment où nous désirons envisager simultanément les points de vue locaux de plusieurs observateurs utilisant des règles et des horloges différentes.

L'espace-temps n'existe que par ce qu'il contient : des particules ; dire que l'espace-temps est courbé ne signifie rien d'autre que ceci : il y a une distorsion dans la transmission des informations entre ces particules. Cette distorsion est entièrement décrite par la matrice de Lorentz et la matrice de changement de potentiel.

44 Le champ gravitationnel se propage-t-il ?

Nous avons vu que la notion de potentiel gravitationnel (par la modification spatio-temporelle qui en résulte, et par les géodésiques associées) suffit à expliquer le mouvement des planètes dans le système solaire. Mais, comme l'avait déjà noté Newton, il ne semble pas raisonnable, à priori, d'imaginer une propagation de la gravité à une vitesse infinie. Cette intuition de Newton est d'ailleurs confirmée par la théorie de la relativité restreinte, pour laquelle la transmission d'un message quelconque à vitesse infinie n'a tout simplement aucun sens. En effet, l'émission et la réception du message devraient alors être simultanées, mais la simultanéité n'a pas de signification absolue, en ce sens que deux événements simultanés pour un observateur ne seront pas simultanés pour un autre observateur. Si la vitesse apparente de l'interaction est infinie pour un observateur, elle sera finie pour un autre observateur.

Il est donc nécessaire, pour accéder au second palier de la gravitation relativiste, d'étudier la propagation du champ gravitationnel. Mais cette étude soulève de nombreuses questions. Je me contenterai ici d'une modeste approche, qui servira davantage à poser les problèmes qu'à les résoudre.

Dans la première partie de ce travail, nous avons supposé que le champ gravitationnel d'un corps massif non accéléré, observé par un "observateur distant" O (immobile par rapport au corps central, mais situé hors de son

champ, dans un potentiel nul), était entièrement décrit par le potentiel newtonien scalaire : $\Phi = -\frac{k}{r}$, indépendant du temps, et à symétrie sphérique. Considérons maintenant un second observateur O' se déplaçant à la vitesse v par rapport au premier (et situé, lui aussi, hors du champ). Quelle sera la structure du champ gravitationnel, observé par O' ? Pour répondre, nous allons supposer que Φ est indépendant de l'observateur : $\Phi(ct, x, y, z) = \Phi(ct', x', y', z')$. Nous allons donc transformer simplement les coordonnées spatio-temporelles par la transformation de Lorentz.

$$\Phi = -\frac{k}{r} = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{k}{\sqrt{\left(\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Pour l'observateur O, les surfaces équipotentielles ($\Phi = cte$) sont des sphères centrées, bien sûr, sur le corps massif de masse M. Pour l'observateur O', à l'instant t' (t'=cte) : $\left(\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + y'^2 + z'^2 = cte$; donc ces surfaces sont des ellipsoïdes (sphères ayant subi, dans le sens du déplacement, une contraction de rapport $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$).

Si c'est le corps massif qui se déplace, et non l'observateur, le résultat est le même (il suffit de remplacer v par $-v$) : les surfaces équipotentielles du champ créé par un corps massif en mouvement uniforme sont tout simplement des ellipsoïdes en mouvement uniforme, qui suivent le déplacement du corps. Ceci résulte de la relativité restreinte : l'observateur O, installé sur une planète immobile, estime que les surfaces équipotentielles du champ gravitationnel de sa planète sont des sphères concentriques. Si cette planète est en mouvement rectiligne et uniforme, il ne verra aucune différence. Ici, une remarque s'impose : s'il est vrai que le message gravitationnel se déplace à une vitesse finie, indépendante de l'état de mouvement de la planète, alors cette vitesse doit être égale à celle de la lumière, qui est la seule à vérifier l'égalité : $c \oplus v = c$ (pour toutes les valeurs de v).

On vient de calculer qu'un autre observateur O', habitant une autre planète en mouvement par rapport à la première, verra des ellipsoïdes. Remarquons que les sphères observées par O sont constituées de points qui sont atteints au "même instant" par le message gravitationnel (cette simultanéité étant évaluée par cet observateur O) ; les points des ellipsoïdes sont aussi atteints simultanément par le message gravitationnel, mais il ne s'agit pas

de la même simultanéité : celle-ci est évaluée par le second observateur O'. Autrement dit, ces ellipsoïdes ne sont pas constitués des mêmes points que les sphères...

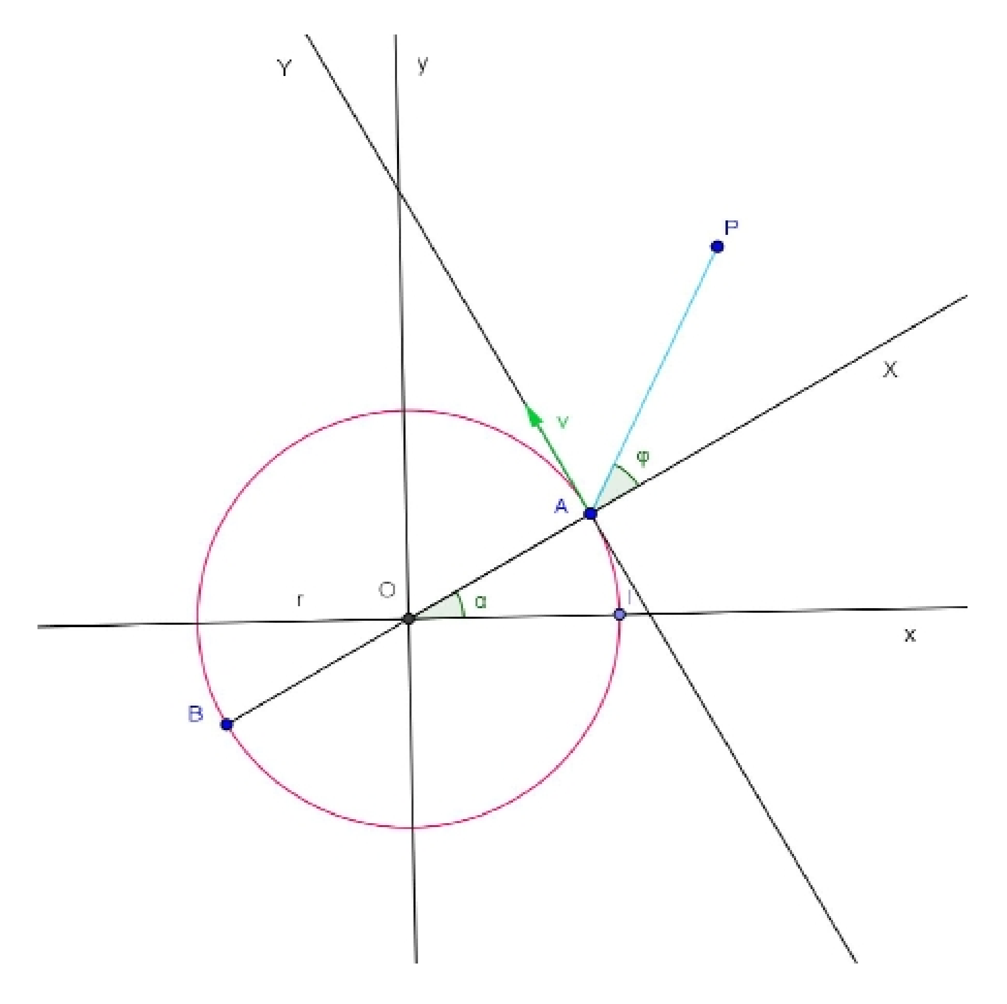
On pourra visualiser cette situation en observant notre animation interactive ci-dessous (programmée en Java), dans laquelle on pourra faire varier la vitesse du mobile. *Après avoir visionné cette animation, évitez de la fermer : cliquez sur retour (ou précédente) pour revenir au document PDF.*

Animation 1

Les choses se compliquent si le mouvement n'est pas rectiligne et uniforme. Supposons par exemple que la planète sur laquelle se trouve l'observateur O subisse une accélération. Comment vont se présenter les surfaces équipotentielles, vues par O ?

Nous allons examiner une hypothèse particulièrement simple : nous imaginerons deux corps A et B (par exemple deux étoiles), de même masse, tournant à vitesse constante sur une orbite circulaire autour de leur centre de gravité O, et nous supposerons que la vitesse de propagation du potentiel gravitationnel, évaluée par l'observateur distant, est égale à la vitesse de la lumière, cette vitesse n'étant perturbée ni par la courbure de l'espace-temps, ni par l'interférence des ondes entre elles. Le potentiel gravitationnel en un point de l'espace-temps sera supposé indépendant de l'observateur ; il sera entièrement déterminé par la distance spatiale par rapport à l'émetteur, distance évaluée dans le repère galiléen qui était celui de l'émetteur, au moment de l'émission. Notre calcul va faire intervenir seulement la relativité restreinte.

Dans la figure ci-dessous, établie par un observateur distant immobile par rapport au centre de gravité O, le point P représente un point quelconque de l'espace-temps à l'instant t. On suppose qu'à cet instant arrive en P un message gravitationnel provenant de l'étoile A, émis à l'instant t_e (instant de l'émission). Le point A de la figure indique le lieu où se trouvait l'étoile A à l'instant t_e. On a donc : $AP = c(t - t_e)$. Supposons que le but soit de déterminer le potentiel gravitationnel en P à l'instant t ; pour cela, il faudrait calculer la distance d du point P par rapport à A, évaluée dans un repère mobile lié à A, à l'instant t_e : $d = c(t - t_e)'$ (où le "prime" désigne le changement d'observateur, qui s'effectue par la transformation de Lorentz). En fait, notre but est de tracer les lignes équipotentielles, c'est-à-dire de déterminer les coordonnées de P pour une valeur fixée de d.



Notons (x, y) les coordonnées spatiales de P dans le repère (O, x, y) et (X, Y) ses coordonnées dans le repère (A, X, Y) (repères liés au centre de gravité O).

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} cos\ \phi \\ sin\ \phi \end{pmatrix} = c(t - t_e) \begin{pmatrix} cos\ \phi \\ sin\ \phi \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} cos\ \alpha \\ sin\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\ \alpha & -sin\ \alpha \\ sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} cos\ \alpha \\ sin\ \alpha \end{pmatrix} + c(t - t_e) \begin{pmatrix} cos\ \alpha & -sin\ \alpha \\ sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} cos\ \phi \\ sin\ \phi \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} cos\ \alpha \\ sin\ \alpha \end{pmatrix} + c(t - t_e) \begin{pmatrix} cos\ (\alpha + \phi) \\ sin\ (\alpha + \phi) \end{pmatrix}.$$

D'après la transformation de Lorentz :

$$d = c(t - t_e)' = \frac{c(t - t_e) - \frac{v\,Y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c(t - t_e) - v(t - t_e)\ sin\ \phi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ ;$$

$$d = \frac{c(t - t_e)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi\right)\ ;$$

$$c(t - t_e) = \frac{d\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi}\ ;$$

$$ct_e = ct - \frac{d\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi}\ ;$$

$$\alpha_e = \frac{vt_e}{r} = \frac{v}{cr}\left(ct - \frac{d\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi}\right).$$

On aura compris que α_e représente la valeur de l'angle α à l'instant de l'émission (t_e).

Pour construire une ligne équipotentielle à un instant donné (t fixé), on fixe une valeur de d (puisque toute valeur du potentiel Φ correspond à une valeur de d), puis on fait varier l'angle ϕ de 0 à 2 π ; pour chaque valeur de ϕ, on calcule les valeurs correspondantes, d'abord de α_e, ensuite de x et y.

Plus explicitement, en posant $t = 0$:

$$ct_e = -\frac{d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi}\ ;$$

$$\alpha_e = \frac{vt_e}{r} = -\frac{v}{c}.\frac{d}{r}.\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi}\ ;$$

$$x = r.cos\left(-\frac{v}{c}.\frac{d}{r}.\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi}\right) + \frac{d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi}.cos\left(-\frac{v}{c}.\frac{d}{r}.\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\ sin\ \phi} + \phi\right)\ ;$$

$$y = r.sin\left(-\frac{v}{c}.\frac{d}{r}.\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\ sin\ \phi}\right)+\frac{d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\ sin\ \phi}.sin\left(-\frac{v}{c}.\frac{d}{r}.\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\ sin\ \phi}+\phi\right).$$

Les lignes équipotentielles ainsi obtenues sont présentées dans l'animation qui suit. On pourra faire varier le rayon de l'orbite et la vitesse des deux étoiles. *Après avoir visionné cette animation, évitez de la fermer : cliquez sur retour (ou précédente) pour revenir au document PDF.*

Animation 2

Remarquons bien que dans cette animation nous avons fait comme si les messages gravitationnels se déplaçaient en ligne droite, à vitesse constante, dans un espace-temps euclidien.

Nos hypothèses sont simplistes, mais suffisent à mettre en lumière quelques problèmes liés à la propagation de la gravité.

Le premier problème est celui de la symétrie T, c'est-à-dire de l'invariance par inversion du sens du temps. Cette symétrie est respectée par toutes les forces fondamentales de la physique, sauf par l'interaction faible, dans des cas tout à fait exceptionnels. Mais surtout, elle n'est pas respectée par la thermodynamique, puisque l'entropie est toujours croissante. En gravitation newtonienne, cette symétrie est parfaitement respectée. En effet, si nous utilisons les lois de Newton (avec transmission instantanée de l'interaction) pour calculer les trajectoires de deux corps en interaction gravitationnelle, les équations donnent les coordonnées des deux corps aussi bien dans le passé que dans le futur : un simple changement de signe de la variable temps (t) suffit à "changer le sens du temps", et la nature des orbites n'en est pas affectée. Si nous décidons d'inverser le sens des vecteurs vitesse des deux étoiles, elles continueront à tourner sur les mêmes orbites, en sens inverse : nous voyons le même film, mais à l'envers. Le calcul du champ (potentiel newtonien) fait intervenir la masse et la position des deux corps, mais non leurs vitesses ; il est indépendant du sens de parcours de l'orbite. Tout change à partir du moment où on fait intervenir une vitesse finie de l'interaction. En effet, dans notre animation, on voit apparaître des spires dont le sens est manifestement lié au sens de parcours de l'orbite : si on inverse le sens du temps, on doit inverser aussi le sens des spires ! Ceci vient du fait que nous avons imaginé que le champ devait se propager radialement à partir de la source, de manière divergente (sous forme de bulles en expansion), et non de manière convergente (bulles en contraction). Il nous a paru naturel de prendre en compte les

"bulles" en expansion (divergeant à partir d'un point de la trajectoire situé dans le passé), et non les "bulles" en contraction (convergeant vers un point de la trajectoire situé dans le futur). C'est à ce moment que nous avons cassé la symétrie T, sans nous en rendre compte : nous avons attribué des rôles différents au passé et au futur. Pourtant, l'attraction gravitationnelle entre deux corps est (spatialement) symétrique. Si la gravitation ne respectait pas la symétrie T, alors elle serait à l'origine de phénomènes irréversibles. Ceci l'éloignerait encore un peu plus des autres forces fondamentales, tout en la rapprochant de la thermodynamique.

Un second problème est celui de l'action et de la réaction. En mécanique newtonienne, les deux corps exercent l'un sur l'autre, simultanément et à distance, des forces opposées. Mais la relativité restreinte ne reconnaît pas la simultanéité !

Troisième problème : observons les lignes équipotentielles émises par le corps A lorsqu'elles rencontrent le corps B. On peut constater qu'elles font un angle avec l'orbite de celui-ci. Si le corps B subit une force orientée selon le gradient du potentiel, alors on voit que la composante perpendiculaire au rayon vecteur n'est pas nulle, ce qui signifie que le moment cinétique de B va varier. Comme la force est dirigée "vers l'avant" (prograde), le moment cinétique de l'étoile B doit croître ; et, par symétrie, celui de A aussi !

Le quatrième problème est celui de la conservation de l'énergie : classiquement, une force prograde entraîne non seulement une augmentation du moment cinétique, mais aussi de l'énergie. On peut le voir d'une autre façon : au point (fixe) où se trouve B à un instant donné, le potentiel créé par A, en raison du mouvement tournant, n'est pas constant, mais croissant : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0$; d'après l'équation des géodésiques, en supposant que celles-ci aient un rôle dans la gravitation, ceci signifie, à première vue, que l'énergie de B va augmenter. Et, par symétrie, l'énergie de A doit augmenter aussi !

Ces remarques se basent en grande partie sur l'idée que le gradient du potentiel est la clé de la gravitation, mais qu'il doit être évalué dans un repère immobile ; nous avons supposé jusqu'ici que ce repère particulier devait être le repère lié au centre de gravité. Ce qui est loin d'être une certitude ! Comme nous l'avons entrevu dans la section sur la version cartesienne des géodésiques, il est permis de penser que l'utilisation des géodésiques et du gradient quadri-dimensionnel nécessite un repère où le potentiel est localement statique ($\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$) ; donc, dans le cas présent, il semble naturel de se placer dans un repère tournant lié à l'une des planètes : le potentiel pro-

duit par A va être localement statique dans un repère mobile lié à B, et réciproquement (de même que la vague est immobile dans un repère lié au surfer). Pour tester cette idée, reprenons l'animation précédente, et, au lieu de chercher comment un message gravitationnel émis par A est perçu dans un repère lié à O, cherchons comment il est perçu dans un repère lié à B. Contentons-nous d'une grossière approximation : dans le changement de repère par transformation de Lorentz, remplaçons v par $v \oplus v = \frac{2.v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$. On obtient le résultat suivant :

Animation 3

Cette animation n'est présentée ici qu'à titre indicatif (elle devra être reprise avec plus de rigueur ; de plus, on peut étudier d'autres versions, basées sur des hypothèses un peu différentes), mais elle permet de faire une constatation intéressante : la composante tangentielle de l'accélération (du moins pour $v < \frac{c}{2}$) est maintenant rétrograde, ce qui permettra peut-être un jour de mieux comprendre la perte d'énergie apparente des pulsars binaires (voir section suivante).

On voit donc que notre connaissance de la gravitation est très fragmentaire : nous comprenons bien comment elle fonctionne dans le cas idéal du système solaire (avec une étoile unique et un champ statique), mais il suffit d'introduire une seconde étoile pour voir apparaître de multiples questions. Il serait donc d'un grand intérêt de commencer à étudier de manière fine la structure du champ gravitationnel d'un système double. Or, il se pourrait que ceci soit bientôt possible : la récente découverte d'exoplanètes tournant dans des systèmes stellaires doubles ouvre des perspectives...

Voyons maintenant comment les idées classiques de Newton peuvent être adaptées au cas d'un système binaire, dans lequel l'interaction gravitationnelle se transmet à vitesse finie.

Supposons que l'accélération $\frac{d\vec{w}}{dt}$ de chaque étoile soit déterminée par le gradient du potentiel de l'autre étoile, et fasse un angle ϵ_1 avec la direction du centre de gravité (dans le sens prograde). Supposons de plus que le vecteur vitesse fasse un angle ϵ_2 avec l'orbite circulaire (dans le sens centripète). Nous allons raisonner sur le mobile fictif. Etudions le produit $ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}$, qui est la forme relativiste de la somme algébrique $1 + \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2} - \frac{G.m}{r.c^2}$.

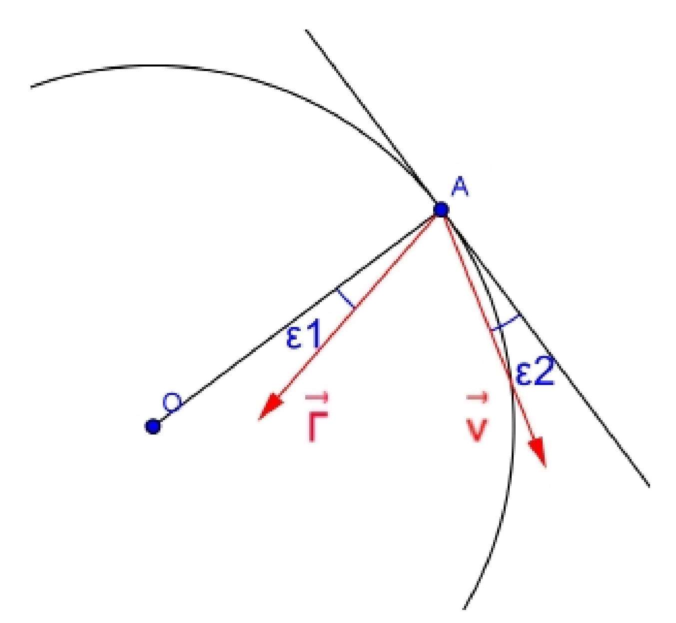
$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}\right) = ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.\frac{G.m}{r^2.c^2}.\frac{dr}{dt} + sh\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.\frac{dw}{c.dt}\ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}\right) = ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.\left(\frac{G.m}{r^2.c^2}.\frac{dr}{dt} + \frac{v}{c}.\frac{dw}{c.dt}\right).$$

D'après nos hypothèses, on a : $\frac{dr}{dt} = -v.sin\epsilon_2 \approx -v.\epsilon_2$ et $\frac{dw}{c.dt} = \frac{1}{c}.\frac{G.m}{r^2}.sin\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right) \approx \frac{1}{c}.\frac{G.m}{r^2}.\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)$; donc :

$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}\right) \approx ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.\left(-\frac{G.m}{r^2.c^2}.v.\epsilon_2 + \frac{v}{c}.\frac{1}{c}.\frac{G.m}{r^2}.\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)\right) \ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}\right) \approx ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.\frac{G.m}{r^2.c^2}.v.\epsilon_1.$$



Ces hypothèses entraînent que le produit $ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}$ n'est pas constant, mais croissant. Par conséquent, si la masse totale m_t du système, supposée constante, est donnée par la formule : $m_t^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}$ (ou une autre formule voisine), il s'ensuit que les masses m_1 et m_2 (donc aussi m) doivent être décroissantes. Par exemple, si $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$, on aura : $m_t^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} + 2.\frac{m^2}{4}.ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}} = \frac{m^2}{2}.\left(1 + ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}\right)$. Ceci permet de calculer comment varie m en fonction de $ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}$.

Bien entendu, si la composante tangentielle de l'accélération est rétrograde, le produit $ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}$ est décroissant ; on peut penser que les masses au repos m_1 et m_2 sont alors croissantes : la conservation globale de la masse m_t (ou de l'énergie totale) l'impose. Ce raisonnement s'applique de la même façon, quel que soit le cadre théorique adopté : le cadre newtonien, ou sa version

relativiste. Cependant, le cadre relativiste est mieux adapté, car l'équivalence entre masse et énergie est indispensable à la compréhension du phénomène : la masse au repos des deux étoiles est une mesure de leur énergie interne, qui n'est pas de nature foncièrement différente de l'énergie de liaison du système binaire. Nous ne savons pas comment s'effectuent les conversions entre ces formes d'énergie ; nous savons seulement que le principe de conservation de l'énergie impose une énergie totale (ou une masse totale : m_t) constante. A moins qu'une partie de l'énergie soit emportée par d'hypothétiques ondes gravitationnelles ?

D'autre part, des formules telles que $a = r_1 + r_2 \approx \frac{2.k}{1-\overline{E}^2} = \frac{2.G.m}{c^2.\left(1-\overline{E}^2\right)}$ (voir la section sur l'aphélie et le périhélie) ou $T^2 = \frac{4.\pi^2.a^3}{G.m}$ (voir la section sur les orbites elliptiques et les lois de Kepler) permettent d'étudier les variations du grand axe (a) de l'orbite du mobile fictif, et de sa période (T).

Comme on le voit, l'introduction d'une propagation de la gravité à vitesse finie soulève des problèmes particulièrement délicats ; c'est, avant tout, la gravitation newtonienne qui est profondément déstabilisée. Pour aborder ces problèmes, il existe de nombreuses directions de recherche ; je vais en évoquer trois.

Première direction : on pourrait imaginer, en s'inspirant des idées d'Eric Verlinde, que la gravité... ne se propage pas ! Autrement dit, une surface sphérique, par exemple, serait, à tout moment et instantanément, informée de la présence de matière dans le volume qu'elle délimite. C'est ce que Newton avait admis pour mener ses calculs, tout en relevant l'absurdité de cette situation. Nous avons dit que cette idée est encore plus absurde dans le contexte de la relativité restreinte. Mais on sait aujourd'hui qu'elle n'est pas du tout absurde pour la physique quantique, qui admet des notions comme l'ubiquité de l'information (car une même information peut être partagée par des corps éloignés, "corrélés", ou "intriqués"), la "non-localité", la "non-séparabilité", la "cohérence" et la "décohérence"... Il n'est pas interdit de penser qu'une information comme l'impulsion-énergie d'une particule soit portée, non pas par cette particule et elle seule (la particule "sachant" parfaitement quelle est son impulsion-énergie, ses voisines n'en sachant rien), mais, à des degrés divers, par un ensemble de particules (la particule "ne sachant pas très bien" quelle est son impulsion-énergie, et ses voisines en ayant, elles aussi, une idée plus ou moins précise, la précision de l'information étant répartie dans l'espace de manière probabiliste). Cette façon d'aborder la gravitation permet de revenir aux surfaces équipotentielles sphériques qu'utilisait Newton,

et donc de résoudre facilement tous les problèmes que nous avons soulevés. J'apellerai cette option : "option de l'information délocalisée".

Seconde direction de recherche : on peut penser que le champ gravitationnel transmet une information (et uniquement une information), de proche en proche, à vitesse finie (cette vitesse pouvant être identifiée, éventuellement, à celle de la lumière). Cette information modifie le potentiel gravitationnel, et, par suite, les règles et les horloges locales, mais sans transport d'énergie. C'est une façon de théoriser ce que nous avons présenté précédemment sous forme d'animation. C'est l'option du "transport d'information à vitesse finie".

Troisième direction de recherche : il est possible que le champ gravitationnel transporte non seulement de l'information, mais aussi de l'énergie. Dans ce cas, il faut préciser quelle est la nature de cette énergie, sur quel support elle est stockée, par quel vecteur elle est transmise. De plus, ces ondes doivent se propager, comme les ondes lumineuses, en mettant en oeuvre, localement, des mécanismes propres. Cette option est celle des "ondes gravitationnelles". C'est celle qui a été choisie par Einstein, mais aussi par la plupart des théories "tenseur-scalaire".

45 Les ondes gravitationnelles existent-elles ?

Cette troisième option suppose un couplage entre le vide et la matière : la matière déforme le vide, le vide agit sur la matière, et cette interaction met en jeu de l'énergie. L'idée que ces déformations du vide (les ondes gravitationnelles) puissent transporter de l'énergie est cependant assez étrange, pour deux raisons : la première, c'est que cette conception du vide semble, à première vue, profondément opposée à celle qui ressort de la relativité restreinte ; la seconde, c'est que, jusqu'à présent, l'énergie était une propriété de la matière, et non de l'espace-temps... Si le vide est vraiment vide (s'il ne contient rien), alors comment peut-il transporter de l'énergie ?

Une difficulté va être d'"inventer" les propriétés de ce vide : comment se déforme-t-il ? Comment se propagent ces déformations ? Quelle est l'énergie mise en jeu ? Et c'est Einstein qui a réussi le tour de force d'apporter une solution complète à ce problème, en se basant sur les contraintes mathématiques imposées par l'invariance de Lorentz (locale) et la conservation de l'impulsion-énergie. Je dis bien : "tour de force", car c'est la première fois dans l'histoire des sciences qu'on pousse aussi loin l'étude d'un phénomène

(les ondes gravitationnelles) sans pouvoir s'appuyer sur la moindre observation ; de sorte que nous savons absolument tout sur ces ondes (vitesse, degrés de liberté, polarisation...), sauf si elles existent !

Si la relativité générale prédit l'existence de ces ondes, c'est parce-qu'Einstein, fortement impressionné par la théorie de l'électromagnétisme (et par sa compatibilité parfaite avec la relativité restreinte), s'est inspiré de ses équations (et plus spécialement d'un opérateur différentiel : le d'Alembertien) pour construire celles de la relativité générale. Mais un raisonnement par analogie n'est pas un raisonnement déductif... D'ailleurs, l'analogie a ses limites, puisque le contexte est radicalement différent : le comportement du champ électromagnétique est aujourd'hui bien compris, grâce à l'électrodynamique quantique, qui le modélise sur la base d'échanges de photons entre particules chargées ; les ondes gravitationnelles, au contraire, concernent l'espace-temps au sens d'Einstein, c'est-à-dire une abstraction mathématique...

Heureusement, grâce à Casimir, on sait aujourd'hui que le milieu qu'on appelle le vide est peuplé de particules, évanescentes ou non. Le vide n'est pas vraiment vide ! Einstein l'ignorait, bien entendu. Il serait donc temps de commencer à étudier l'interaction physique entre les mobiles et ce milieu : comment le vide freine-t-il les mobiles, comment récupère-t-il l'énergie, sous quelle forme la stocke-t-il, comment la propage-t-il ? Si les ondes gravitationnelles existent, elles doivent avoir un support physique, et il est indispensable de mieux connaître ce support pour savoir quel type d'onde il est capable de véhiculer. Il est parfaitement naturel de penser que les solides en mouvement puissent perturber le vide (je veux parler ici du vide au sens de Casimir, peuplé de particules qui apparaissent et disparaissent aléatoirement), et que ces perturbations puissent se propager de manière ondulatoire ; mais pourquoi ces ondes devraient-elles avoir, précisément, les propriétés des ondes gravitationnelles prévues par la relativité générale ?

Les ondes gravitationnelles, prédites par Einstein en 1918 (bientôt un siècle !) sont traquées par les physiciens depuis déjà longtemps. En 1968, Joseph Weber, utilisant un dispositif de son invention (barres de Weber), n'avait aucune chance de les débusquer... Dans les années 1980-1990, de nombreux scientifiques estimaient que les expériences en cours, plus sophistiquées, allaient les mettre en évidence avant l'an 2000 ; au début des années 2000, avec la mise en service des détecteurs Ligo, Virgo, Geo600, on pouvait s'attendre à une détection directe avant 2005 ; aujourd'hui (en 2013), on estime qu'il faudra attendre une amélioration des détecteurs existants (prévue pour 2015) pour avoir des chances d'obtenir les premiers résultats. On compte également

sur le projet ET (mise en service prévue en 2025), et surtout sur l'interféromètre spatial Elisa (qui pourrait être mis en orbite vers 2020 ?). Soyons donc patients, et ne classons pas les ondes gravitationnelles parmi les certitudes scientifiquement établies, tant qu'elles n'auront pas été détectées.

Rappelons que l'étude détaillée du pulsar binaire PSR $1913 + 16$, constitué de deux étoiles à neutrons (l'une étant un pulsar radio, l'autre invisible) très rapprochées, en rotation rapide autour du centre de gravité du système (période : 7,75 h), a permis de déceler une accélération faible mais régulière, qui a pu être interprétée, indirectement, comme la signature des ondes gravitationnelles. En effet, cette accélération révèle un rapprochement progressif des deux étoiles, qu'on interprète comme une perte d'énergie, correspondant à l'énergie rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles, d'après la théorie d'Einstein. Cette découverte a valu le prix Nobel à Hulse et Taylor en 1993.

On présente souvent, comme une preuve absolue de l'existence des ondes gravitationnelles, le fameux graphique sur lequel se superposent, d'une part, la courbe observée, montrant l'avance (au sens où on parle de l'avance d'une horloge) du système PSR $1913 + 16$ en fonction du temps (telle qu'elle a été établie à partir des mesures effectuées), et, d'autre part, la courbe théorique, calculée sur la base de l'émission d'ondes gravitationnelles : les deux courbes coïncident d'une manière absolument parfaite ! Mais cette présentation est destinée à frapper les esprits. Concernant la forme des courbes, il s'agit, bien sûr, de paraboles, car l'avance de l'"horloge" a pour dérivée sa vitesse angulaire, qui croît linéairement ; le graphique montre simplement que le taux de croissance de la vitesse angulaire est bien celui que prévoit la relativité générale. Mais on oublie trop souvent de nous dire que ce taux a été corrigé par un effet Shklovski ad hoc...

L'effet Shklovski décrit la modification apparente de la période d'une horloge en mouvement accéléré par rapport à l'observateur, selon la direction radiale. Dans le cas d'un pulsar (ou d'une étoile quelconque), cette accélération est liée, principalement, à sa rotation autour du centre galactique ; c'est un vecteur dirigé vers le centre de la galaxie, dont le module peut être calculé, connaissant la distance du pulsar par rapport au centre galactique. Mais pour calculer la position du pulsar par rapport à ce centre galactique, on a besoin de connaître non seulement sa direction, mais aussi sa distance par rapport à l'observateur, ce qui est beaucoup plus difficile. Dans le cas de PSR $1913 + 16$, le test paraissait très probant, pace-que l'évaluation de l'effet Shklovki était modérée, et basée sur une évaluation raisonnable de la distance. Mais, par la suite, d'autres pulsars binaires ont été étudiés, selon

un protocole plus rigoureux ; on a alors constaté que la marge d'erreur sur la distance était très importante, et que l'évaluation de l'effet Shklovski était peu fiable. Ceci a sensiblement fragilisé la pertinence des premiers tests. On peut citer, par exemple, le cas de $PSR\ B1534 + 12$, dont la distance a dû être réévaluée de 30%, dans le but d'obtenir un effet Shklovski ad hoc, pour expliquer l'accélération séculaire observée, en préservant la composante due, selon le calcul relativiste, à l'émission d'ondes gravitationnelles. Dans le cas de $PSR\ J0437 - 4715$, cette composante est, théoriquement, si faible que l'accélération séculaire est interprétée entièrement par l'effet Shklovski, qui est donc utilisé pour calculer la distance du système.

Heureusement, d'autres pulsars binaires (ainsi que des couples serrés de naines blanches), présentant une accélération séculaire compatible avec les prévisions de la relativité générale (à 17% près), ont été étudiés. Leur nombre est suffisant pour qu'on puisse raisonnablement admettre qu'il s'agit d'un argument favorable à l'existence d'ondes gravitationnelles. Mais tant qu'elles n'auront pas été observées directement, on ne pourra pas affirmer que leur nature et leurs propriétés soient bien celles que prévoit la relativité générale !

Il faut rappeler que l'existence des ondes gravitationnelles n'est pas liée au principe d'équivalence fort ; d'ailleurs la plupart des théories tenseur-scalaire prévoient de telles ondes. L'approche que nous avons présentée ici est parfaitement compatible avec leur existence. Cependant, notre façon d'aborder le paradoxe de Schild suppose que ces ondes, si elles existent, doivent être très différentes de celles d'Einstein. En effet, nous avons dit que la longueur des règles locales était affectée par le champ gravitationnel, de manière identique dans toutes les directions. Or, la particularité des ondes de la relativité générale est, précisément, qu'elles modifient les longueurs de manière différente selon la direction. C'est cette propriété qui est exploitée par les interféromètres de Michelson utilisés par les projets Ligo et Virgo : les deux branches (perpendiculaires) de l'interféromètre doivent être affectées de manière différente par le passage des ondes, pour que l'interféromètre puisse détecter une différence (minime) de longueur. Ceci n'a aucune chance de se produire, si notre interprétation du paradoxe de Schild est la bonne. De plus, selon notre approche, la modification des règles n'est pas visible pour un observateur local, et ne peut en aucun cas être mise en évidence par le temps de parcours d'un rayon lumineux.

Au cas où les recherches en cours, basées sur les interféromètres de Michelson, mettraient en évidence des ondes qualitativement et quantitativement similaires à celles que prévoit la relativité générale, il s'agirait sans nul doute

d'un très grand succès pour cette théorie. Ceci nous obligerait à réviser notre interprétation du paradoxe de Schild.

Pour le moment, l'accélération des pulsars binaires est considérée, par une majorité de physiciens, comme une preuve convaincante de l'existence des ondes gravitationnelles ; c'est donc l'un des principaux points forts de la relativité générale. Mais ce point fort peut devenir point faible, si la détection directe échoue. Il est donc essentiel de savoir si ces ondes existent, avant de faire un pas de plus vers la construction d'une théorie complète de la gravitation. On attend donc avec impatience les résultats des détecteurs (Ligo, Virgo, Geo600), qui, jusqu'ici, restent désespérément silencieux. Peut-être nous apporteront-ils les premières données en 2015 ? Ou bien faudra-t-il attendre la mise en service de l'interféromètre spatial Elisa ? Le suspense reste entier.

46 Le graviton existe-t-il ?

On admet généralement que les forces fondamentales sont véhiculées par des particules (le photon pour l'électromagnétisme, les bosons $W+$, $W-$, Z_0, pour l'interaction faible, les gluons pour l'interaction forte), et on a imaginé que la gravitation pourrait être véhiculée, elle aussi, par une particule : le graviton. D'après la théorie, il pourrait s'agir d'un boson de masse nulle, de spin égal à 2, se déplaçant à la vitesse de la lumière ; mais cette particule n'a pas été détectée.

Au cas où le graviton existerait (ce qui reste à prouver), son rôle serait bien particulier : l'attraction qui s'exerce entre le Soleil et une planète, par exemple, ne peut pas être conçue comme un simple échange de gravitons entre ces deux astres. En effet, le Soleil n'agit pas directement sur la planète, mais sur la structure de l'espace-temps dans le voisinage de celle-ci, ce qui est différent ! Ceci est prouvé par l'étude de la précession de de Sitter, dont nous avons parlé précédemment. Les échanges de gravitons ne peuvent pas se faire entre un corps matériel et un autre corps matériel, mais entre un corps matériel et le vide. A moins (une fois encore) que le vide soit moins vide qu'on ne l'a cru jusqu'ici ?

D'autre part, nous avons vu que l'énergie des planètes est constante : l'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre les corps ne peut pas être conçue comme un échange d'énergie. Peut-être un échange d'information, mais pas

d'énergie ! Ceci souligne une fois de plus la place très particulière de la gravitation par rapport aux autres forces fondamentales.

Certains théoriciens (comme Erik Verlinde) refusent d'intégrer la gravitation dans les forces fondamentales (électromagnétisme, interaction faible et interaction forte), et ne croient pas à l'existence du graviton.

L'une des difficultés que rencontrent les théoriciens, lorsqu'ils cherchent à décrire la gravitation sur le modèle de l'électrodynamique quantique (donc en imaginant un échange de gravitons entre particules massives) est la suivante : si les gravitons existent, ils doivent posséder une énergie, donc une masse, comme toutes les autres particules (même si leur masse au repos est nulle) ; donc ils doivent interagir entre eux, gravitationnellement, par l'intermédiaire d'autres gravitons, qui, eux-mêmes, doivent interagir par l'intermédiaire d'autres gravitons, et ainsi de suite... Ce qui conduit à une densité infinie de gravitons ! Ce problème (non résolu) s'évanouit dans une théorie basée sur l'information partagée (ou la non-séparabilité), car l'information n'a ni énergie, ni masse.

A l'heure actuelle, l'existence du graviton n'étant pas confirmée, les chercheurs ont pris l'habitude de l'exclure du modèle standard.

47 Les trous noirs existent-ils ?

On lit couramment que l'existence des trous noirs est une certitude, que de nouveaux trous noirs ont été découverts, etc...

Les trous noirs stellaires, prévus par la théorie, n'ont pas encore été mis en évidence de manière directe : la plupart des candidats pourraient être des étoiles à neutrons. Dans certains cas, on a cependant la preuve qu'il ne peut pas s'agir d'étoiles à neutrons. Citons par exemple le cas de Cygnus X-1 : dans ce système double, une étoile est en rotation autour d'une source de rayons X. L'étude du mouvement de l'étoile a permis d'évaluer la masse de cette source : elle est supérieure à 6 masses solaires (probablement comprise entre 7 et 13 masses solaires), ce qui est très supérieur à la masse maximale d'une étoile à neutrons, qui serait de l'ordre de $3,3$ masses solaires (selon les calculs d'Oppenheimer et Volkoff). D'après la théorie, une étoile ayant une telle masse doit s'effondrer en trou noir, car aucune force connue ne peut résister à la gravité. Ceci est vrai, du moins, dans une théorie basée sur la

métrique de Schwarzschild ; mais c'est assez différent avec la métrique de Ni, comme nous le verrons un peu plus loin.

Actuellement, on connaît un bon nombre de binaires X apparentées à Cygnus X-1 ; mais c'est surtout l'étude des sursauts gamma qui apporte un indice intéressant en faveur de l'existence des trous noirs stellaires : on suppose qu'ils trahissent l'effondrement d'étoiles situées dans des galaxies lointaines. Lors de tels événements, une étoile massive se transformerait en trou noir. Trou noir au sens de Schwarzschild ou de Ni ?

Quant aux trous noirs supermassifs, on estime qu'ils sont présents au centre de la plupart des galaxies spirales. Dans le cas de la Voie Lactée, on a pu mettre en évidence une concentration impressionnante de matière dans un volume très réduit : c'est l'étude des orbites des étoiles autour de ce grumeau central qui a permis de déterminer sa masse de manière précise : $3,6$ millions de masses solaires ! Pour qu'une telle masse forme un trou noir, il faudrait qu'elle soit concentrée dans une sphère de rayon inférieur à 16 rayons solaires, c'est-à-dire dans un volume équivalent à celui d'une étoile géante (nettement plus grosse qu'une naine comme le Soleil, mais beaucoup plus petite qu'une supergéante).

En ce qui concerne les quasars, ces galaxies primitives très lointaines et exceptionnellement lumineuses, ils sont interprétés comme des trous noirs géants, de plusieurs millions (ou centaines de millions ?) de masses solaires. Mais ils sont aussi considérés comme les ancêtres des galaxies évoluées comme la nôtre.

La seule chose qu'on puisse affirmer aujourd'hui, c'est qu'il existe des "astres compacts" : quasars, cœurs de galaxies, ou étoiles. Le mot "compact" signifie que le quotient $\frac{M}{r}$ se rapproche de la limite de Schwarzschild : $\frac{c^2}{2G}$. Ne confondons pas la "compacité" (définie par ce quotient $\frac{M}{r}$) avec la densité, qui est proportionnelle à $\frac{M}{r^3}$: si r est très grand, la compacité peut être élevée et la densité très faible...

Rappelons que le rayon de Schwarzschild d'un corps massif se calcule facilement, connaissant sa masse : $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. Si sa dimension apparente semble inférieure à son rayon de Schwarzschild, on en déduit, d'après la relativité générale, qu'il s'agit d'un trou noir, limité par un horizon ; mais, bien entendu, on n'a jamais observé directement cet "horizon"...

A quoi correspond exactement cette notion d'horizon au sens de Schwarzschild ? Imaginons une masse M comprimée dans une sphère de rayon inférieur à $2k = \frac{2GM}{c^2} = r_s$ (limite de Schwarzschild) ; par exemple, une étoile de même masse que le Soleil, dans une sphère de moins de 3 km de rayon. Pour l'observateur distant, c'est cette sphère de Schwarzschild, de rayon $r_s = 2k$, qui va constituer un horizon au-delà duquel son regard n'aura pas accès : aucune information provenant de l'intérieur de cette sphère ne peut lui parvenir. Si un vaisseau spatial, par exemple, est happé par le trou noir, l'observateur distant le verra ralentir à l'approche de l'horizon, car le coefficient de ralentissement du temps tend alors vers 0 ; et il ne le verra jamais franchir l'horizon. Mais si nous adoptons le point de vue des astronautes embarqués dans le vaisseau, qui vivent en temps local, alors ce ralentissement n'existe pas.

Dans notre approche, basée sur la métrique de Ni, le coefficient de ralentissement du temps ne tend pas vers 0 quand on s'approche de la sphère de Schwarzschild ; pour qu'il tende vers 0, il faudrait que la masse M (non nulle) soit concentrée dans un volume nul. Cette sphère constitue cependant une limite de stabilité des orbites, puisqu'aucune orbite circulaire (ou elliptique) ne peut exister à l'intérieur de celle-ci. Si on imagine la masse M concentrée dans un volume nul (singularité centrale), alors toutes les orbites pénétrant dans la sphère de Schwarzschild plongeront vers la singularité, et il n'y aura plus de force centrifuge pour les retenir. Pour l'observateur distant, ce plongeon durera un temps infini : le phénomène situé à l'horizon de Schwarzschild par la relativité générale est donc repoussé jusqu'à la singularité centrale. Mais on se doute bien que les singularités (masses non nulles concentrées dans un volume nul) n'existent pas !

Est-il possible de sortir de la sphère de Schwarzschild ? Avec la métrique de la relativité générale (c'est-à-dire celle de Schwarzschild), c'est impossible, car, du point de vue d'un observateur distant, le temps nécessaire pour que le mobile entre dans le trou noir (ou en sorte) est infini ! En métrique de Ni, l'impossibilité rencontrée en relativité générale n'a plus de signification : un mobile pourra franchir la limite, de l'extérieur vers l'intérieur, en un temps fini ; il suffira alors de "passer le film à l'envers" (ou d'inverser le sens du vecteur vitesse) pour le voir ressortir. Un mobile pourra donc ressortir de la sphère de Schwarzschild, mais pour cela il devra changer d'orbite (car une orbite qui entre dans cette sphère n'en ressort pas spontanément) ; ceci nécessitera un échange d'énergie, dont la probabilité sera d'autant plus faible que le puits de potentiel sera plus profond. Mais il n'est plus question d'une durée infinie ! Les "trous noirs" ne sont peut-être pas aussi noirs qu'on le dit !

Rappelons que la notion de trou noir découle tout naturellement de la gravitation newtonienne. En effet, dans cette théorie, la vitesse de libération est : $v_l = \sqrt{\frac{2.G.M}{r}}$; donc, pour $M > \frac{r.c^2}{2.G}$, la vitesse de la lumière est insuffisante pour permettre aux rayonnements d'échapper à la gravité de l'astre, comme l'avait déjà remarqué Laplace.

On peut présenter ce raisonnement d'une autre façon, toujours en s'appuyant sur la théorie de Newton : imaginons un corps dont la masse M (masse évaluée par un observateur distant) n'est pas concentrée en un point, mais répartie à l'intérieur d'une sphère de rayon r. Nous supposerons, de plus, que la matière, libre de se déplacer à l'intérieur de la sphère sous l'effet des forces gravitationnelles, trouve un équilibre ; cet équilibre est atteint lorsque les forces s'annulent, c'est-à-dire lorsque le potentiel gravitationnel est constant à l'intérieur de la sphère ; il est alors égal à : $\Phi = -\frac{GM}{r}$. Quand on se rapproche de la surface du corps (en venant de l'"infini"), le champ gravitationnel décroît de 0 à $-\frac{GM}{r}$; puis, quand on pénètre à l'intérieur, il se stabilise.

Nous allons récupérer une masse infinitésimale dm "à l'infini", puis nous allons la déposer délicatement (à vitesse nulle, c'est-à-dire en prélevant la totalité de son énergie cinétique) dans la sphère en question. Au départ, la masse totale du système est $M + dm$, mais en se rapprochant, les deux corps perdent de l'énergie potentielle, donc de la masse.

Je précise ce que j'entends par "prélever l'énergie cinétique". Lorsqu'un mobile se déplace librement sur son orbite, l'énergie newtonienne totale (comprenant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle) est constante : lorsque Φ augmente, v diminue, et réciproquement ; quand l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue (et inversement). Ce phénomène de balancier, parfaitement réversible, conserve l'énergie totale. Un prélèvement d'énergie cinétique suppose une intervention extérieure : freinage faisant intervenir des collisions ou des frottements avec dégagement de chaleur, ou une émission de rayonnements emportant de l'énergie. De tels phénomènes physiques brisent l'équilibre entre Φ et v, et modifient l'énergie du mobile. Si l'énergie cinétique est prélevée en totalité, on peut considérer, selon l'équivalence relativiste entre masse et énergie, que la masse au repos du mobile a été réduite. Elle était égale à m_0 avant le prélèvement, elle est égale à $m_0 + \frac{1}{c^2}.\Delta E_p$ après. Bien sûr, ΔE_p est la variation de l'énergie potentielle. Dans le cas présent : $\Delta E_p = -\frac{G.M.dm}{r}$. On a donc :

$$M + dM = M + dm - \frac{G.M.dm}{r.c^2} \ ;$$

$$dM = \left(1 - \frac{G.M}{r.c^2}\right).dm \ ;$$

$$\frac{dM}{1 - \frac{G.M}{r.c^2}} = dm \ ;$$

$$\frac{d\left(\frac{G.M}{r.c^2}\right)}{1 - \frac{G.M}{r.c^2}} = d\left(\frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$\frac{d\left(1 - \frac{G.M}{r.c^2}\right)}{1 - \frac{G.M}{r.c^2}} = -d\left(\frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$d\left(Log\left(1 - \frac{G.M}{r.c^2}\right)\right) = d\left(-\frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$Log\left(1 - \frac{G.M}{r.c^2}\right) = -\frac{G.m}{r.c^2} + constante \ ;$$

$$1 - \frac{G.M}{r.c^2} = K.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.$$

La constante K doit être égale à 1, pour que M s'annule lorsque $m = 0$; donc :

$$\frac{G.M}{r.c^2} = 1 - e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.$$

Si nous faisons tendre m vers l'infini, alors $\frac{G.M}{r.c^2}$ tend vers 1.
Nous voyons donc apparaître une limite pour la masse M (incluse dans la sphère de rayon r) : $\frac{r.c^2}{G}$. Lorsque la masse M approche de cette limite, elle augmente de moins en moins vite pour un même apport dm de matière extérieure.

Ce raisonnement se base sur les équations de Newton ; nous allons maintenant les abandonner, pour reprendre le calcul avec les équations relativistes inspirées par la métrique triviale de Ni. Nous pouvons utiliser l'égalité $m_t \approx M + m_2.e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}$ que nous avons vue dans la section "Vers un modèle relativiste des systèmes binaires" ; dans le cas présent, cette égalité s'écrit :

$$M + dM \approx M + e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.dm, \text{ ou :}$$

$$dM \approx e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.dm.$$

Cette formule semble presque identique à celle que nous venons d'utiliser ci-dessus, puique $1 - \frac{G.M}{r.c^2}$ est le développement limité de $e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}$ au premier ordre ; pourtant, la conclusion va être différente :

$$e^{\frac{G.M}{r.c^2}}.dM \approx dm \ ;$$

$$e^{\frac{G.M}{r.c^2}}.d\left(\frac{G.M}{r.c^2}\right) \approx d\left(\frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$d\left(e^{\frac{G.M}{r.c^2}}\right) \approx d\left(\frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$e^{\frac{G.M}{r.c^2}} \approx \frac{G.m}{r.c^2} + constante.$$

La constante doit être égale à 1, pour que M s'annule lorsque $m = 0$; donc :

$$\frac{G.M}{r.c^2} \approx Log\left(1 + \frac{G.m}{r.c^2}\right) \ ;$$

$$M \approx \frac{r.c^2}{G}.Log\left(1 + \frac{G.m}{r.c^2}\right).$$

Si nous faisons tendre m vers l'infini, M tend aussi vers l'infini ; donc, à priori, en métrique de Ni, il ne semble pas impossible de faire pénétrer une masse quelconque dans une sphère de rayon donné.

Cependant, le curieux phénomène de "création d'espace" peut alors jouer un rôle important. Voyons comment.

Imaginons une masse M répartie de manière équilibrée dans une sphère de rayon r ; ce qui signifie que le potentiel gravitationnel est supposé constant à l'intérieur de celle-ci. Faisons ensuite varier r pour observer les variations de la densité ρ.

Nous admettrons que les volumes élémentaires mesurés par les observateurs locaux (à l'intérieur de la sphère) sont multipliés par le coefficient $e^{-\frac{3\Phi}{c^2}} = e^{\frac{3GM}{rc^2}}$ (en effet, le potentiel étant constant, toutes les mesures de distance sont multipliées par le même coefficient de dilatation de l'espace : $e^{\frac{GM}{rc^2}}$) ; le volume total inclus dans la sphère (obtenu en sommant les mesures locales des observateurs locaux) est donc : $V = \frac{4}{3}\pi \ r^3 \ e^{\frac{3GM}{rc^2}}$. La masse M est évaluée par un observateur distant ; nous supposons qu'elle ne varie pas quand r diminue, ce qui signifie que son énergie cinétique augmente, tandis que son énergie potentielle diminue. Notons bien que dans ce calcul, contrairement au précédent, il n'est pas question de "prélever l'énergie

cinétique" : les variations de r se font à énergie constante, donc à masse constante. La densité moyenne (évaluée par un observateur local) est donc : $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\ r^3\ e^{\frac{3GM}{rc^2}}} = \frac{3M}{4\pi r^3}\ e^{-\frac{3GM}{rc^2}}$.

La masse M est supposée fixée ; faisons varier le rayon r (évalué, lui aussi, par l'observateur distant). Si on fait tendre r vers l'infini, ρ tend vers 0, comme on pouvait s'y attendre. Mais lorsqu'on fait tendre r vers 0, alors ρ tend encore vers 0, ce qui est plus surprenant ! La densité admet un maximum ρ_{max}, facile à calculer en étudiant la dérivée de la fonction $\rho = f(r)$:

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{3M}{4\pi}.\frac{r^3.\frac{3GM}{r^2c^2}.e^{-\frac{3GM}{rc^2}} - 3r^2.e^{-\frac{3GM}{rc^2}}}{r^6} = \frac{3M}{4\pi r^4}\left(\frac{3GM}{rc^2} - 3\right)e^{-\frac{3GM}{rc^2}}\ ;$$

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{9M}{4\pi r^4}\left(\frac{GM}{rc^2} - 1\right)e^{-\frac{3GM}{rc^2}}.$$

La dérivée s'annule pour $\frac{GM}{rc^2} = 1$, soit $r = \frac{GM}{c^2}$. En substituant dans l'expression de ρ, on obtient :

$$\rho_{max} = \frac{3M}{4\pi r^3}\ e^{-\frac{3GM}{rc^2}} = \frac{3M}{4\pi\left(\frac{GM}{c^2}\right)^3}\ e^{-3} = \frac{3c^6}{4\pi G^3 e^3 M^2} \approx \frac{3.10^{79}}{M^2}\ kg/m^3.$$

Cette formule montre que la densité maximale diminue rapidement lorsque la masse augmente !

Comment interpréter ce résultat ?
Partons d'une sphère de grand rayon ($\frac{GM}{rc^2} << 1$), et supposons qu'elle se contracte, la masse M restant constante et répartie de manière équilibrée. Tant que le rayon r est suffisamment grand par rapport à la valeur limite $\frac{GM}{c^2}$, la densité moyenne ρ croît sensiblement comme en gravitation newtonienne, car le coefficient de dilatation des distances $e^{\frac{k}{r}} = e^{\frac{GM}{rc^2}} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ reste très proche de 1, donc négligeable (de même que le coefficient de dilatation des volumes : $e^{\frac{3GM}{rc^2}}$) ; mais à l'approche de la valeur critique, ce coefficient se met à augmenter brusquement : on pourrait dire que "la matière se met à fabriquer de l'espace" ! Et lorsque r atteint la valeur critique, cette "création d'espace" contrebalance exactement l'accroissement de la densité !

Je vais préciser la valeur de cette densité maximale, dans quelques cas particuliers, car je crois que cette notion permet de bien comprendre la différence de comportement des objets compacts, en métrique de Schwarzschild et en métrique de Ni.

Pour une étoile de même masse que le Soleil, le rayon critique $\frac{GM}{c^2}$ est de l'ordre de $1,47$ km (et le rayon de Schwarzschild est donc $2,94$ km) ; s'il était possible de comprimer le Soleil jusqu'à cette limite, sa densité (mesurée localement) serait :

$$\rho_{max} = \frac{3.10^{79}}{M_\odot^2} = \frac{3.10^{79}}{4.10^{60}} \approx 7,5.10^{18}\ kg/m^3.$$

C'est une densité prodigieuse, qui dépasse, de beaucoup, tout ce que les astronomes ont pu observer jusqu'ici (presque 10 fois la densité d'une étoile à neutrons) ; les théories actuelles peinent à calculer le comportement de la matière à une telle densité ; mais c'est une densité finie. Bien entendu, cette limite est purement théorique : les physiciens ont calculé qu'une étoile comme le Soleil peut se transformer en naine blanche ; mais la pression de la matière dégénérée est alors suffisante pour arrêter l'effondrement, et le stade d'étoile à neutrons n'est jamais atteint. On considère qu'une étoile peut s'effondrer et se transformer en étoile à neutrons si sa masse est comprise entre la limite de Chandrasekhar, soit environ $1,4\ M_\odot$, et la limite d'Oppenheimer-Volkoff, souvent évaluée à $3,3\ M_\odot$ (mais nous préfèrerons l'estimer à $2,8\ M_\odot$, pour une raison que nous allons voir tout de suite). Calculons la densité maximale (qui est inversement proportionnelle au carré de la masse), à la limite de Chandrasekhar ($M = 1,4\ M_\odot$) ; on trouve : $\frac{7,5.10^{18}}{1,4^2} \approx 3,8.10^{18}\ kg/m^3$. Nous avons calculé qu'une étoile à neutrons atteint la limite de Schwarzschild pour $M \approx 2,4.M_\odot$, et la limite critique (demi-rayon de Schwarzschild) pour $M \approx 2,8.M_\odot$. Dans le premier cas, la densité maximale est : $\frac{7,5.10^{18}}{2,4^2} \approx 1,35.10^{18}\ kg/m^3$, et, dans le second cas : $\frac{7,5.10^{18}}{2,8^2} \approx 0,96.10^{18}\ kg/m^3$. Or, la densité des étoiles à neutrons, d'après les calculs des spécialistes, doit être de l'ordre de $10^{18}\ kg/m^3$. Lorsque la masse dépasse $2,8.M_\odot$, la densité maximale descend au-dessous de $10^{18}\ kg/m^3$, ce qui est insuffisant pour permettre la formation d'une étoile à neutrons : les protons et les électrons restent libres, et ne fusionnent pas pour former des neutrons. La découverte d'un pulsar de $2,7.M_\odot$ a été annoncée : si cette nouvelle était confirmée, il s'agirait d'une étoile à neutrons de masse maximale (ou presque). Nous en avons parlé dans la section sur l'effet Einstein à la surface des étoiles à neutrons ; nous avons vu que ces étoiles peuvent être, en même temps, des "trous noirs de Ni" (si leur masse est comprise entre $2,4.M_\odot$ et $2,8.M_\odot$), tout

en restant parfaitement visibles. Pour Schwarzschild, les trous noirs seraient visuellement inobservables ; pourtant, les astronomes en ont peut-être déjà vu un !

Considérons maintenant une étoile de masse nettement supérieure ; choisissons comme exemple Cygnus X-1, dont la masse serait comprise entre 7 et 13 masses solaires. Son rayon critique est compris entre 10 et 20 km, et la densité maximale entre $1,5.10^{17}$ et $4,4.10^{16}$ kg/m^3, donc bien inférieure à celle d'une étoile à neutrons. Ce type d'étoile illustre bien ce qu'on a pris l'habitude d'appeller un trou noir stellaire. Le rayonnement X est émis par des nuages de gaz spiralant à très grande vitesse dans un champ gravitationnel extrême. Si l'étoile entière pouvait se contracter jusqu'à pénétrer complètement dans sa sphère critique, la "création d'espace" serait telle que sa densité maximale (mesurée localement) serait très insuffisante pour produire une étoile à neutrons ; par conséquent, lorsqu'on dit : "une étoile à neutrons dont la masse dépasse la limite d'Oppenheimer-Volkoff se transforme en trou noir parce-que sa densité devient trop forte", c'est inexact ; au contraire, sa densité est trop faible ! Mais alors, comment peut-on se représenter l'étoile Cygnus X-1 ? Comme on vient de le voir, sa densité est nécessairement faible ; les tourbillons de gaz qui l'entourent doivent atteindre des vitesses relativistes. L'énergie cinétique (vitesse de rotation, chaleur) doit l'emporter de beaucoup sur l'énergie de masse. Pour que cette étoile puisse se contracter, il faudrait que cette énergie cinétique soit rayonnée, et, bien entendu, la masse totale diminuerait d'autant ; il faudrait que la masse restante descende au-dessous de $2,8.M_\odot$ pour qu'elle puisse se transformer en étoile à neutrons. Ceci nous conduit à penser qu'une étoile très massive comme Cygnus X-1 n'a peut-être rien à voir avec les "trous noirs", tels qu'ils ont été décrits, sur la base de la relativité générale...

Allons plus loin, et imaginons un "trou noir supermassif" de 3,6 millions de masses solaires (comparable à celui qui est décrit au centre de notre galaxie). Sa densité maximale sera beaucoup plus faible. On obtient :

$$\rho_{max} \approx 5,8\ .\ 10^5\ kg/m^3.$$

C'est à peu près 4 fois la densité qui règne au centre du Soleil, mais c'est très loin de la densité d'une étoile à neutrons. Le comportement de la matière, à ce niveau de densité, peut être déduit de l'étude du plasma qui constitue les étoiles. Mais n'oublions pas qu'il s'agit ici de la densité maximale, atteinte lorsque le rayon r (évalué par l'observateur distant) est égal à $\frac{GM}{c^2}$, soit, dans ce cas, 5,3 millions de km (un peu moins de 8 fois le rayon du Soleil, ou $\frac{1}{80}$

de celui de Bételgeuse). En supposant que le rayon r puisse décroître encore au-dessous de ce seuil, alors la densité (mesurée localement) se mettrait à décroître elle aussi ! Mais rien ne nous permet d'affirmer qu'une telle compacité soit atteinte, ou seulement approchée...

Considérons enfin une masse d'un milliard de soleils (comme les trous noirs dont la présence a été imaginée au cœur des quasars). On obtient alors :

$$\rho_{max} \approx 7,5\ kg/m^3.$$

Ceci correspond à $7,5$ millièmes de la densité de l'eau sur Terre ! On peut donc estimer que le cœur actif des quasars (en supposant que ce soit un plasma comparable à celui qui constitue les étoiles) ne devrait pas dépasser quelques dizaines de millions de masses solaires.

Toutes ces remarques nous conduisent à une conception des trous noirs profondément différente de celle qui résulte de la relativité générale. Si je conserve le nom de "trous noirs", c'est parce-que la lumière qui nous en provient est nécessairement affaiblie, pour deux raisons principales : les photons perdent de l'énergie (apparente) en luttant contre la gravité, et le ralentissement du temps a pour conséquence qu'ils semblent émis en moins grand nombre par unité de temps. Mais, en toute rigueur, on pourrait parler d'objets compacts plutôt que de trous noirs...

Voyons maintenant les raisons qui justifient les réticences de certains physiciens vis-à-vis des trous noirs au sens de Schwarzschild.

La première raison est que cette conception du trou noir semble contredire le principe de conservation de Lavoisier, qu'on résume par la formule : "rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme". En effet, si la matière et la lumière pouvaient pénétrer dans un trou noir (en franchissant son horizon), alors, pour l'observateur distant, cette matière et cette lumière disparaîtraient de manière irréversible. Il n'y aurait pas, à proprement parler, de perte d'énergie (puisque la masse du trou noir augmente en fonction de ce qu'il avale), mais, au minimum, une perte d'information.

On pourra répondre (à juste titre) que, pour l'observateur distant, le temps mis par la matière (ou la lumière) pour pénétrer dans le trou noir est infini, comme nous l'avons expliqué précédemment ; autrement dit, rien ne peut pénétrer dans le trou noir. On pourrait dire que, pour l'observateur distant, l'intérieur du trou noir n'a pas de réalité physique : c'est une sorte

de bulle vide, ou, mieux, une illusion ; toute la masse se trouve à l'extérieur de l'horizon. Celui-ci n'est alors qu'une limite (par nature infranchissable) de l'espace-temps, car il se situe, pour ainsi dire, à l'infini dans le temps.

Mais alors comment peut-on concevoir la formation d'un trou noir de Schwarzschild ? La théorie en vigueur prévoit, en effet, qu'une étoile massive peut s'effondrer, en un temps fini, sous forme de trou noir. C'est cette possibilité qui est contestée par certains théoriciens ("Observation of incipient black holes and the information loss problem", T. Vachaspati, D. Stojkovic, L.M. Krauss, Physical Review D). Avec la métrique de Ni, ce problème ne se pose pas.

La deuxième raison, c'est que les physiciens (contrairement aux mathématiciens) considèrent généralement que les quantités infinies qui apparaissent dans leurs calculs sont dues à des erreurs, à des interprétations erronées, ou à des extrapolations hâtives...

Troisième raison : imaginons qu'il puisse exister de la matière à l'intérieur de l'horizon, et que cette matière soit la cause de la courbure de l'espace-temps à l'extérieur du trou noir (cette courbure étant donc sa conséquence). Dans ce cas, comment cette cause pourrait-elle être responsable de cette conséquence, sachant qu'aucun message ne peut sortir du trou noir ? Cest ce que j'appelle le paradoxe de l'interaction entre objets compacts.

Plusieurs théoriciens ont pensé que l'horizon des trous noirs était un artefact mathématique dû à un mauvais choix des variables, et ils ont essayé de le faire disparaître, avec un succès mitigé, grâce à des changement de variables astucieux, mais artificiels. Il n'en demeure pas moins que, pour l'observateur distant, les paradoxes que nous venons d'évoquer sont irréductibles. A moins de remplacer la métrique de Schwarzschild par celle de Ni... Il est bien probable que l'horizon des trous noirs soit un artefact ; mais il ne provient pas d'un mauvais choix des variables : il provient, évidemment, du pari d'Einstein.

En résumé, le concept de trou noir limité par un horizon trouve son origine dans la gravitation de Newton ; une synthèse élémentaire de la théorie newtonienne avec la relativité restreinte conduit à l'effacement de cet horizon. Einstein aurait très bien pu concevoir la relativité générale comme un simple prolongement de la relativité restreinte ; au lieu de cela, il s'est passionné pour les espaces courbes de Riemann et de Gauss, et son pari l'a entraîné dans une toute autre direction. Ce qui a eu une conséquence qu'il n'avait pas prévue : le retour des trous noirs ! Car, rappelons-le, Einstein lui-même es-

timait, paradoxalement, que les discontinuités de Schwarzschild ne devaient pas exister dans la réalité physique...

Ceci ne minimise pas l'intérêt des études menées par les astronomes sur les "trous noirs stellaires" et les "trous noirs géants" : ces travaux sont passionnants, même s'il s'agit d'"objets très compacts" et non de véritables trous noirs au sens de Laplace et de Schwarzschild !

48 Le big bang a-t-il eu lieu ?

On présente parfois le big bang comme une évidence : l'expansion de l'univers étant admise, que verrait-on s'il était possible de passer le film à l'envers, pour remonter dans le temps ? On verrait, bien sûr, les galaxies se rapprocher les unes des autres, et l'univers rétrécir... Jusqu'où ? Pourquoi pas jusqu'au point initial ?

Aussi séduisant qu'il puisse paraître, ce raisonnement doit être considéré avec prudence. Si des astronomes vivaient, par exemple, dans une zone périphérique de la nébuleuse du Crabe (qui est, rappelons-le, en expansion), et si la portée de leurs instruments ne leur permettait pas de voir au-delà de cette nébuleuse, ils pourraient en conclure que l'univers entier est sorti d'un point en l'an 1054... Mais nous savons que ce n'est pas le cas !

Nous ne savons pas si la partie de l'univers actuellement étudiée est représentative de l'ensemble ; il serait donc hautement hasardeux de faire des extrapolations portant sur l'univers dans sa globalité ! Pour cette raison, de nombreux scientifiques considèrent la théorie du big bang comme un "mythe moderne", tandis que d'autres y voient une théorie scientifique à part entière...

Une mise en équations de l'univers dans sa globalité a été tentée d'abord par Einstein, à partir des équations de la relativité générale. Comme il croyait que l'univers était statique (c'était peu avant la découverte de la fuite des galaxies par Hubble), il avait cru bon d'introduire sa fameuse constante cosmologique (la plus grande erreur de sa vie, dira-t-il plus tard) pour garantir cette stabilité.

D'autre part, De Sitter, travaillant sur un modèle d'univers vide, remarque qu'il est nécessairement instable.

Enfin, Friedmann, Robertson et Walker, s'inspirant de la théorie de l'atome primitif de Georges Lemaître, mettent au point le modèle standard homogène, qui fait aujourd'hui référence en tant que modèle cosmologique basé sur la relativité générale. Son postulat fondamental est l'homogénéité : l'univers doit être globalement identique, quel que soit l'observateur choisi.

Selon ce modèle, les galaxies sont immobiles (on pourrait dire : gravitationnellement immobiles - tiens, la relativité générale, elle aussi, admet cette notion...), et l'expansion de l'univers résulte d'une dilatation continue de l'espace (on pourrait dire, en utilisant notre vocabulaire, qu'il y a une création continue d'espace). Donc la vitesse de récession des galaxies n'est pas une vraie vitesse : la vitesse locale de chaque galaxie est supposée nulle ; il en résulte que cette vitesse de récession peut très bien dépasser la vitesse de la lumière, sans qu'il y ait violation de la relativité restreinte. Cette expansion n'est pas expliquée (en tant que phénomène physique), mais son évolution est calculée, en fonction de la densité de matière (supposée identique en tout point) ; car la gravité freine l'expansion. Quelle que soit la valeur attribuée à cette densité, l'expansion débute par une phase ponctuelle (le big bang) ; à cet instant, le taux d'expansion est infini. Ensuite, il diminue. Si la densité de matière est suffisante, l'expansion finit par s'arrêter, et l'univers commence alors à se contracter, jusqu'au big crunch. Si elle est insuffisante, l'expansion est infinie.

Cette théorie a remporté de très beaux succès, dont les plus connus sont la découverte du fond diffus à $2,7\ K$, ou rayonnement cosmologique fossile (datant, selon la théorie, de l'époque où les particules se sont combinées en atomes), et l'explication de la nucléosynthèse primordiale. Mais je voudrais rappeler quelques problèmes majeurs.

Le big bang peut s'étudier de deux façons : la première consiste à observer l'univers qui nous entoure, tel qu'il est, et à essayer de reconstituer son histoire, en remontant dans le passé, de proche en proche, en se basant sur les lois connues de la physique ; la seconde consiste à partir de l'instant zéro, et à imaginer le scénario qui a pu conduire à l'univers que nous voyons aujourd'hui. Le problème essentiel, c'est que ces deux approches ne se rencontrent pas. Plus exactement, si on veut les obliger à se rencontrer, il faut imaginer une astuce ad hoc (j'allais dire un subterfuge...) ; cette astuce s'appelle : l'inflation. L'inflation est une phase très courte de l'expansion de l'univers, peu après le big bang, pendant laquelle son rayon aurait été multiplié brutalement par un facteur considérable : 10^{26} selon certains théoriciens,

$10^{1\ 000\ 000}$ pour d'autres... Cette inflation se serait même propagée à une vitesse supérieure à celle de la lumière ! La nécessité de faire appel à une notion aussi improbable (et invérifiable) aurait été fatale à toute autre théorie scientifique... Mais l'idée du big bang a survécu, pour une raison mystérieuse !

Voyons d'un peu plus près où se situe l'origine du problème. Le modèle standard homogène prévoit l'existence d'un horizon des événements : les galaxies situées au-delà ne sont pas visibles, car leur lumière, en principe, n'a pas encore eu le temps de nous parvenir. Autrement dit, les premiers âges de l'univers doivent être masqués. Cet horizon recule, c'est-à-dire que la partie visible de l'univers (en pourcentage) augmente au cours du temps, de 0% au moment du big bang, jusqu'à 100% à la "maturité" ; d'autre part, le taux d'expansion de l'univers, infini au début, s'annule à la maturité. Mais les astronomes ont pu observer des galaxies vieilles de près de 13 milliards d'années, alors que l'âge de l'univers prévu par la théorie est $13,7$ milliards d'années. De plus, nous recevons actuellement le rayonnement dit cosmologique (fond diffus à $2,7\ K$), émis, en principe, en l'an 380 000, ce qui signifie que le pourcentage de l'univers qui est aujourd'hui accessible à l'observation serait supérieur à $99,997\%$. Nous serions donc très près de l'âge de maturité, et pourtant l'expansion continue ! Ceci conduit à douter de l'existence de cet horizon prévu par la théorie ! (Au sujet de l'horizon, on pourra lire la page de Christian Magnan : http ://www.lacosmo.com/horizon.fr.html.)

De plus, dans ce modèle, le taux d'expansion étant infini à l'instant du big bang, deux points quelconques A et B, même très proches, ne peuvent pas communiquer : un message (rayon lumineux par exemple) envoyé par A en direction de B ne pourra atteindre son but que très longtemps après ; ceci vient du fait que le taux d'expansion, dans les premiers temps, était si élevé que même la lumière ne pouvait pas lutter "contre le courant" ! Par conséquent, ces deux points sont causalement déconnectés à l'origine : ils s'ignorent ; ils se reconnectent lorsque la lumière émise par A finit par atteindre B, et réciproquement ; autrement dit, lorsque l'horizon de A rattrape B, et réciproquement ; ce qui suppose un ralentissement suffisant du taux d'expansion. Ceci a pour conséquence que l'univers, dans sa jeunesse, n'a pas pu s'homogénéiser, car les échanges étaient impossibles. Or, l'observation de l'univers lointain (galaxies primitives) et du rayonnement cosmologique à $2,7\ K$ montrent, au contraire, que l'univers observable était très homogène, il y a plus 13 milliards d'années... Pour cette raison, les astronomes ont récusé l'idée d'un taux d'expansion infini à l'origine : ce taux aurait été nul ou très faible au moment du big bang, permettant l'homogénéisation de l'ensemble ; mais alors il a fallu ensuite une phase d'expansion très rapide pour rattraper

le retard et recoller au scénario mis au point par les astronomes... C'est cette phase qu'on nomme l'inflation.

On dit souvent que l'observation des galaxies lointaines, et du rayonnement cosmologique, confirme l'inflation : il serait plus exact de dire qu'elle infirme le modèle homogène standard !

Passons au second problème. Loin de résoudre la question de l'inflation, la mécanique quantique a jeté un nouveau pavé dans la mare. L'acteur principal de cette histoire est le physicien néerlandais Hendrik Casimir. En 1948, il avait prédit que deux plaques conductrices non chargées, parallèles et très rapprochées, doivent s'attirer, en raison des fluctuations du vide quantique. Cet effet a effectivement été observé depuis 1958, et mesuré ensuite avec une bonne précision (en utilisant des miroirs). En 2011, c'est l'effet Casimir dynamique qui a pu être observé. L'effet Unruh, également lié aux fluctuations du vide quantique, est actuellement l'objet de recherches. Le point important, c'est que le vide quantique possède une énergie (parfois appelée "énergie du point zéro"), qui peut être mise en évidence par des procédés relativement simples. Mais la relativité générale d'Einstein prévoit que toutes les formes d'énergie courbent l'espace-temps de la même façon : il doit en être de même de l'énergie du vide. Les physiciens ont donc tenté de calculer la densité de cette énergie. Et ils arrivent à un bilan colossal, supérieur d'un facteur 10^{120} à ce qu'indiquent les observations des astronomes et les calculs des cosmologistes ! De sorte qu'il est, tout simplement, impossible de le prendre en compte dans un calcul de la courbure de l'univers, basé sur le modèle standard... Et, à l'heure actuelle, personne n'arrive à justifier de manière convaincante cette "mise à l'écart" de l'énergie du vide... C'est pourtant une énergie bien réelle, et observable !

Dans l'optique qui est la nôtre, la courbure apparente de l'espace-temps se manifeste lorsque des observateurs, situés dans des potentiels différents, utilisent des règles et des horloges différentes. Si la densité de l'énergie du vide est la même partout, elle ne produit aucune distorsion, donc aucune courbure !

Analysons d'un peu plus près cette différence fondamentale entre la métrique triviale de Ni et celle de Schwarzschild.

En métrique de Ni, le coefficient utilisé pour calculer le ralentissement (ou l'accélération) des horloges et la dilatation (ou la contraction) des règles,

dans un champ gravitationnel Φ, est $e^{\frac{\Phi}{c^2}}$; si on considère deux observateurs O_1 et O_2, le changement de repère (passage de O_1 à O_2, ou inversement) fera intervenir le quotient de ces coefficients :

$$\frac{e^{\frac{\Phi_1}{c^2}}}{e^{\frac{\Phi_2}{c^2}}} = e^{\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}}.$$

Ce quotient ne dépend que de la différence de potentiel entre les deux observateurs. Ceci résulte de la propriété bien connue des exponentielles : $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Cette propriété ne marche pas en métrique de Schwarzschild, car le coefficient $e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ est remplacé par $\sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}$, comme nous l'avons vu dans la section sur le "pari d'Einstein". Le quotient est alors :

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{2\Phi_1}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\Phi_2}{c^2}}} \neq \sqrt{1 + \frac{2\left(\Phi_1 - \Phi_2\right)}{c^2}}.$$

On voit donc que le potentiel, en relativité générale, est nécessairement absolu ; et, si on décide de l'éliminer au profit de la courbure, c'est cette courbure qui sera absolue.

La relativité de la notion de potentiel est une propriété qui existait déjà en gravitation newtonienne, et qui se conserve tout naturellement en métrique de Ni. Paradoxalement, c'est la théorie de la relativité générale qui l'a "cassée", dès le début, lorsqu'Einstein a fait son pari, basé sur ses expériences de pensée.

Abordons maintenant le troisième problème, qui est celui de l'"énergie sombre" (ou "énergie noire") : encore une notion improbable, qu'il a fallu inventer pour sauver le big bang !

Rappelons l'origine de l'idée d'une "énergie sombre" : les supernovæ de type Ia sont considérées comme des chandelles standards, car leur luminosité absolue, d'après la théorie en vigueur, est constante ; la mesure de leur luminosité apparente permet donc d'évaluer leur distance, et par suite, celle des galaxies dans lesquelles elles apparaissent. Par ailleurs, la distance de ces galaxies peut être évaluée par leur décalage vers le rouge, en s'appuyant sur la loi de Hubble, qui dit que la vitesse de récession des galaxies est proportionnelle à leur distance. Mais lorsqu'on compare les distances galactiques évaluées par ces deux méthodes, on constate une différence, petite mais systématique.

Pour résoudre ce problème, il a fallu corriger la loi de Hubble : la vitesse de récession des galaxies n'est pas proportionnelle à leur distance, donc la vitesse d'expansion de l'univers n'est pas rigoureusement constante.

La théorie du big bang , sous la forme du modèle standard homogène, prévoyait un ralentissement de cette expansion : en effet, les forces gravitationnelles, tout naturellement, doivent la freiner. Mais l'observation a prouvé le contraire : l'expansion semble accélérer. Il a fallu alors imaginer un "moteur" responsable de cette accélération : c'est l'énergie sombre, qui représenterait 74% de l'énergie présente dans l'univers ... Ce qui signifie que les trois-quarts de l'énergie de l'univers seraient de nature complètement inconnue ! C'est un véritable séisme pour les tenants de la théorie du big bang ! Mais nous allons voir un peu plus loin qu'il est possible d'interpréter ces observations de différentes manières...

Le modèle idéal de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker est évidemment faux : ceci est prouvé d'abord par la nécessité de faire appel au phénomène d'inflation (qui contredit la régularité de l'expansion, qui est la base du modèle), ensuite par le fait que l'expansion semble accélérer (alors que le modèle prévoyait un ralentissement). Qu'un modèle mathématique idéal décrive mal la réalité, quoi de plus normal ? Des tentatives ont été faites pour le corriger. D'une part, les physiciens relativistes se déclarent incompétents pour décrire l'instant du big bang et la phase d'inflation, et se tournent vers les physiciens des quanta pour les charger de cette question ; ceux-ci s'adressent aux théoriciens des cordes pour leur demander de faire un effort... D'autre part, en réintroduisant une constante cosmologique ad hoc, ils tentent de justifier l'accélération de l'expansion, sans l'expliquer vraiment : ce retour de la constante cosmologique d'Einstein semble signifier que le comportement de l'univers à grande échelle n'est pas dicté uniquement par la gravitation...

Reprenons ces questions avec l'éclairage que nous fournissent les sections précédentes.

Jusqu'ici, dans l'étude que nous avons faite de la "création d'espace", ce phénomène était toujours lié aux variations du champ gravitationnel, elles-mêmes dictées par les déplacements des corps massifs. Ceci n'est pas en accord avec les idées de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker : leur modèle suppose que les galaxies sont (gravitationnellement) immobiles ; mais, dans notre optique, si les galaxies étaient immobiles, alors le champ gravitationnel devrait être statique, donc il ne pourrait pas y avoir de création d'espace ! A moins que la création d'espace qui se manifeste par l'expansion de l'univers

soit due à un phénomène différent, non gravitationnel ?

Nous allons envisager deux options pour aborder ce problème.

Première option : supposons que les déplacements de la matière soient bien à l'origine du phénomène appelé "expansion de l'univers". Les équations qui sont à la base de la présente étude, basées sur la métrique de Ni, suggèrent alors un passé bien différent de celui qui est le plus souvent admis. En effet, considérons la partie visible de l'univers, qui est globalement en expansion ; par la pensée, inversons la flèche du temps pour revenir vers le passé. Selon la métrique de Ni, comme nous l'avons vu dans la section sur les trous noirs, il est impossible que la densité tende vers l'infini ! En effet, il existe un seuil critique à partir duquel la "création d'espace" contrecarre la contraction, qui ralentit, puis... s'arrête ? ... s'inverse ? Ici, arrêtons notre réflexion, car nous ne disposons pas des éléments nécessaires pour aller plus loin.

Cette première option n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire : lorsqu'on cherche à la mettre en équations, on se heurte à un grand nombre de questions non résolues.

Mais nous ne savons pas si la "création d'espace" qui se manifeste par l'expansion de l'univers est due à des déplacements de la matière (donc à la gravité) ; peut-être est-elle due à un phénomène totalement différent : ce serait, dans ce cas, l'espace lui-même qui créerait de l'espace ! Ceci nous rapprocherait des idées de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker : pour eux, les galaxies ne se déplacent pas ; c'est l'espace qui se dilate.

Amusons-nous (comme ils l'ont fait avant nous) à inventer un modèle mathématique simple et "homogène" basé sur cette idée (dans le cadre de la métrique de Ni, bien sûr). Tous les observateurs considérés seront supposés gravitationnellement immobiles, et situés dans un même potentiel ; leurs règles et leurs horloges ne subiront aucune distorsion gravitationnelle. Voici donc notre deuxième option, que nous allons présenter en deux temps.

Dans un premier temps, nous allons partir de la loi de Hubble usuelle, que nous écrirons sous la forme :

$$\vec{v} = H.\vec{l}.$$

On pourra imaginer que l'observateur se trouve dans une galaxie A, et observe une galaxie B telle que : $\vec{l} = \vec{AB}$; bien sûr, $\vec{v}$ est la vitesse de récession

de B, mesurée par A.

Comme la galaxie B est gravitationnellement immobile, il va de soi que la vitesse $\vec{v}$ ne peut pas être considérée comme une constante liée à cette galaxie ; elle ne peut être liée qu'à la distance ; et puisque la distance de la galaxie varie, sa vitesse de récession varie aussi. En module, on aura donc :

$$v = \frac{dl}{dt} = H.l \ ;$$

$$\frac{dl}{l} = H.dt \ ;$$

$$d\,(Log\ l) = H.dt \ ;$$

$$Log\ l - Log\ l_0 = H.(t - t_0) \text{ (où } l_0 \text{ est la distance à un instant } t_0 \text{ donné) ;}$$

$$\frac{l}{l_0} = e^{H(t-t_0)} \ ;$$

$$l = l_0.e^{H(t-t_0)}.$$

Nous obtenons, évidemment, une croissance exponentielle de la distance de la galaxie en fonction du temps ; ce qui est bien normal, puisque nous avons supposé que "l'espace crée de l'espace", et ceci à un taux constant, comme le montre bien l'égalité : $\frac{dl}{dt} = H.l$; pendant une durée donnée dt, l'accroissement dl d'une longueur quelconque l est proportionnel à l.

Par conséquent, la galaxie B va s'éloigner de plus en plus vite ; ceci ne contredit pas ce qui a été dit auparavant, puisque :

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{d\left(e^{H(t-t_0)}\right)}{dt} = H.e^{H(t-t_0)} = H.l.$$

Si nous remontons dans le passé, il faudra faire tendre t vers $-\infty$ pour que la distance tende vers 0. Ceci signifie qu'il n'y a pas d'instant origine : le big bang est rejeté, pour ainsi dire, à l'infini dans le passé ; il n'y a plus de singularité. Les explications usuelles de la nucléosynthèse primordiale et du fond diffus cosmologique restent valables. De plus, l'univers, ayant passé un temps "infini" (peut-être seulement : long ?) dans un état très condensé, a eu tout le temps nécessaire pour s'homogénéiser.

Dans un tel modèle d'univers, un observateur pourra voir toutes les galaxies jusqu'à ce qu'elles franchissent un horizon sphérique et immobile ; au-delà, elles fuient trop vite pour que leur lumière puisse lui parvenir.

Sous cette forme, ce modèle est nécessairement faux, puisque, par hypothèse, il prévoit une vitesse de récession rigoureusement proportionnelle à la distance : $\frac{dv}{dl} = H$, quelle que soit la distance. Nous savons que ceci n'est pas confirmé par les supernovæ de type Ia : elles montrent que la loi de Hubble n'est pas suivie de manière aussi stricte dans la réalité.

Mais il y a une autre difficulté, qui se manifeste lorsqu'on veut changer de repère. En effet, nous venons d'utiliser la loi de Hubble sous sa forme usuelle : $\vec{v} = H.\vec{l}$; pour l'observateur A, cette formule décrit un champ de vitesses, de structure particulièrement simple. Mais, si nous changeons de repère (en changeant de galaxie de référence), cette structure ne se conserve pas, car les vitesses ne sont pas additives en relativité restreinte, et se transforment selon la règle (complexe) de la composition des vitesses, qui n'est pas une addition vectorielle. Si toutes les galaxies respectaient strictement la loi de Hubble usuelle, du point de vue d'un observateur situé dans une galaxie A, alors elles ne la respecteraient pas, pour un observateur situé dans une autre galaxie B ! Nous ne sommes donc pas satisfait par un tel modèle : il n'est pas homogène.

Dans un second temps, nous allons donc, pour pallier cet inconvénient, homogénéiser la loi de Hubble : pour cela, il suffit de remplacer la vitesse $\vec{v}$ par la rapidité $\vec{w}$. La loi de Hubble homogénéisée est donc :

$$\vec{w} = H.\vec{l}.$$

La structure du champ de rapidités sera conservée par changement de galaxie de référence, car les rapidités, contrairement aux vitesses, ont la propriété d'être additives (on pourra trouver des explications dans mon étude : Les vitesses en Relativité restreinte.pdf). Un changement de galaxie de référence équivaut à un simple changement d'origine dans l'espace des rapidités. Nous écrirons donc :

$$\frac{v}{c} = th\frac{w}{c} = th\frac{H.l}{c}.$$

Sous cette forme, la loi de Hubble revue et corrigée respecte la condition d'"homogénéité" que recherchaient les auteurs du modèle standard.
On a :

$$\frac{dl}{c\ dt} = \frac{v}{c} = th\frac{w}{c} = th\frac{H.l}{c} = \frac{sh\frac{H.l}{c}}{ch\frac{H.l}{c}}\ ;$$

$$\frac{H.dl}{c} = \frac{sh\frac{H.l}{c}}{ch\frac{H.l}{c}}.H.dt\ ;$$

$$\frac{ch\frac{H.l}{c}.\frac{H.dl}{c}}{sh\frac{H.l}{c}} = H.dt \ ;$$

$$\frac{d\left(sh\frac{H.l}{c}\right)}{sh\frac{H.l}{c}} = H.dt \ ;$$

$$d\left(Log\left(sh\frac{H.l}{c}\right)\right) = H.dt \ ;$$

$$Log\left(sh\frac{H.l}{c}\right) - Log\left(sh\frac{H.l_0}{c}\right) = H.(t-t_0) \text{ (où } l_0 \text{ est la distance à un instant } t_0 \text{ donné)} \ ;$$

$$\frac{sh\frac{H.l}{c}}{sh\frac{H.l_0}{c}} = e^{H.(t-t_0)} \ ;$$

$$\frac{H.l}{c} = Argsh\left(sh\frac{H.l_0}{c}.e^{H.(t-t_0)}\right).$$

Cette formule a des points communs avec celle que nous avions obtenue précédemment ; par exemple, quand t tend vers $-\infty$, l tend toujours vers 0, et quand t tend vers $+\infty$, l tend toujours vers $+\infty$.

Mais il y a une différence importante : quand l tend vers l'infini, v ne tend pas vers l'infini, mais vers c. Il en résulte qu'il n'y a plus d'horizon : tout l'univers est, en principe, accessible à l'observation. Tous les problèmes liés à l'horizon disparaissent !

D'autre part, puisque $\frac{v}{c} = th\frac{H.l}{c}$, on déduit que $\frac{dv}{c} = d\left(th\frac{H.l}{c}\right) = \frac{\frac{H.dl}{c}}{ch^2\frac{H.l}{c}}$, donc : $\frac{dv}{dl} = \frac{H}{ch^2\frac{H.l}{c}}$; ce qui signifie que le taux d'expansion apparent n'est pas constant : il est égal à $\frac{H}{ch^2\frac{H.l}{c}}$, et semble donc diminuer quand la distance augmente, autrement dit quand on recule dans le passé ; ou, si on préfère, il semble plus élevé aujourd'hui qu'autrefois. Ceci est conforme aux observations.

Le redshift (décalage vers le rouge) des galaxies est donné par la formule :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} - 1.$$

Si on travaille avec la loi de Hubble usuelle : $v = H.l$, alors on utilisera le redshift usuel :

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} - 1 = \sqrt{\frac{1+\frac{H.l}{c}}{1-\frac{H.l}{c}}} - 1.$$

Si on adopte la loi de Hubble homogénéisée : $w = H.l$, alors on utilisera le redshift homogénéisé :

$$z_2 = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} - 1 = \sqrt{\frac{1+th\frac{w}{c}}{1-th\frac{w}{c}}} - 1 = \sqrt{\frac{1+th\frac{H.l}{c}}{1-th\frac{H.l}{c}}} - 1 \;;$$

ce qui donne, en appelant λ_e la longueur d'onde à l'émission, et λ_r la longueur d'onde à la réception :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{\lambda_e + \Delta\lambda}{\lambda_e} = 1 + z_2 = \sqrt{\frac{1+th\frac{w}{c}}{1-th\frac{w}{c}}} = \sqrt{\frac{ch\frac{w}{c}+sh\frac{w}{c}}{ch\frac{w}{c}-sh\frac{w}{c}}} \;;$$

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{\frac{e^{\frac{w}{c}}+e^{-\frac{w}{c}}}{2}+\frac{e^{\frac{w}{c}}-e^{-\frac{w}{c}}}{2}}{\frac{e^{\frac{w}{c}}+e^{-\frac{w}{c}}}{2}-\frac{e^{\frac{w}{c}}-e^{-\frac{w}{c}}}{2}}} = \sqrt{\frac{e^{\frac{w}{c}}}{e^{-\frac{w}{c}}}} = \sqrt{e^{\frac{2w}{c}}} = e^{\frac{w}{c}} = e^{\frac{H.l}{c}} \;;$$

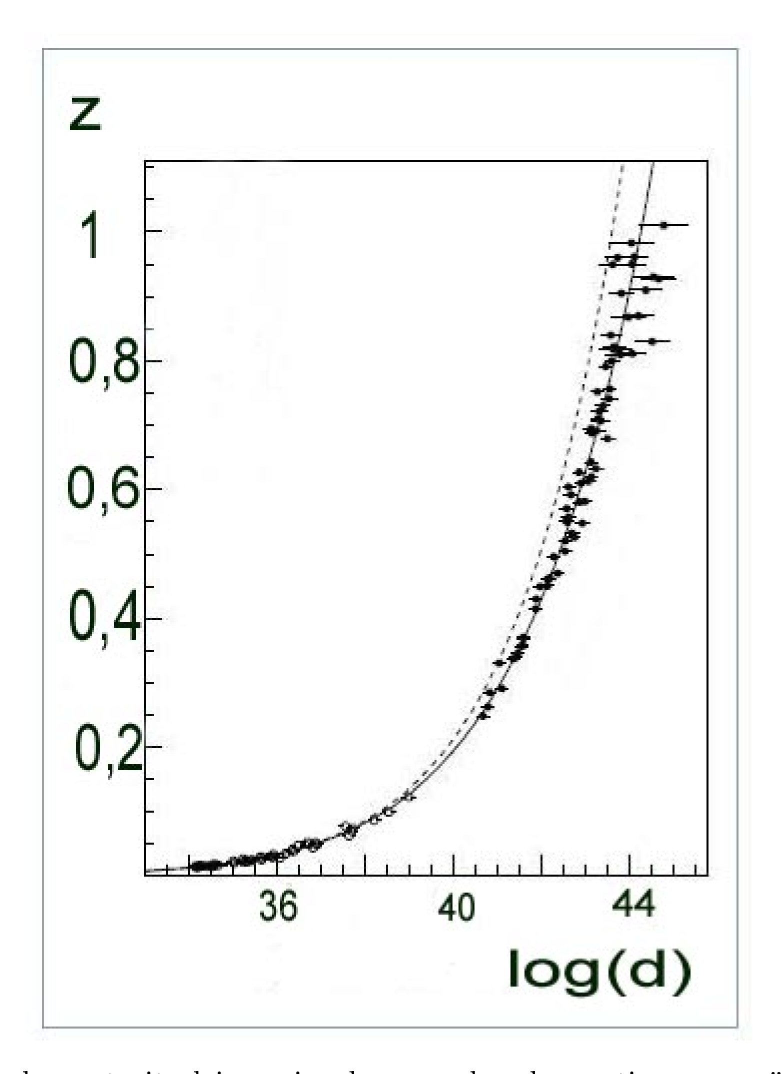
$$l = \frac{c}{H}.Log\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_e}\right).$$

Supposons qu'un rayonnement passe successivement par trois points alignés A, B, C, de rapidités w_A, w_B, w_C ; sa longueur d'onde est λ_A quand il passe en A, λ_B quand il passe en B, λ_C quand il passe en C. On doit avoir : $\frac{\lambda_C}{\lambda_B}.\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{\lambda_C}{\lambda_A}$, ce qui est bien le cas, car :

$$e^{\frac{w_C-w_B}{c}}.e^{\frac{w_B-w_A}{c}} = e^{\frac{w_C-w_A}{c}}.$$

La fonction exponentielle permet d'établir une relation simple (homomorphisme) entre l'ensemble multiplicatif des coefficients $1 + z = \frac{\lambda'}{\lambda}$ (coefficients de dilatation des longueurs d'onde) et l'ensemble additif des rapidités relatives (et non des vitesses !). C'est en ce sens que le redshift z_2 est homogène.

Le graphique ci-dessous concerne les supernovæ Ia ; il est à l'origine des questions sur l'énergie sombre. Le logarithme de la distance (établie d'après la luminosité des supernovæ, mesurée par les astronomes) figure en abscisse, et leur redshift (également mesuré) en ordonnée.



La courbe en trait plein, qui se base sur les observations, ne coïncide pas avec la courbe en pointillé, qui a été calculée à l'aide du modèle standard (sans énergie sombre). On peut penser que ce modèle standard contient une erreur systématique. Laquelle ?

Le redshift du modèle standard est, bien sûr, le redshift usuel z_1 ; c'est celui qui est utilisé dans tous les calculs basés sur ce modèle. Mais il se pourrait bien que le véritable redshift (celui qui est mesuré par les astronomes) soit le redshift homogénéisé z_2. L'erreur serait tout simplement une confusion entre z_1 et z_2 ! Pour corriger les calculs, il suffirait alors de rétablir le véritable redshift z_2, sans changer la distance (car la distance de luminosité, calculée d'après l'éclat des supernovæ, est bien leur vraie distance).

Pour une distance d (ou une longueur l) fixée, on a : $1 + z_1 = \sqrt{\frac{1+\frac{H.l}{c}}{1-\frac{H.l}{c}}}$, ce

qui entraîne :

$$(1+z_1)^2 = \frac{1+\frac{H.l}{c}}{1-\frac{H.l}{c}} \ ;$$

$$\left(1-\frac{H.l}{c}\right).(1+z_1)^2 = 1+\frac{H.l}{c} \ ;$$

$$\frac{H.l}{c}.\left((1+z_1)^2+1\right) = (1+z_1)^2-1 \ ;$$

$$\frac{H.l}{c} = \frac{(1+z_1)^2-1}{(1+z_1)^2+1}.$$

Comme $1+z_2 = e^{\frac{H.l}{c}}$, on déduit que :

$$z_2 = e^{\frac{(1+z_1)^2-1}{(1+z_1)^2+1}} - 1.$$

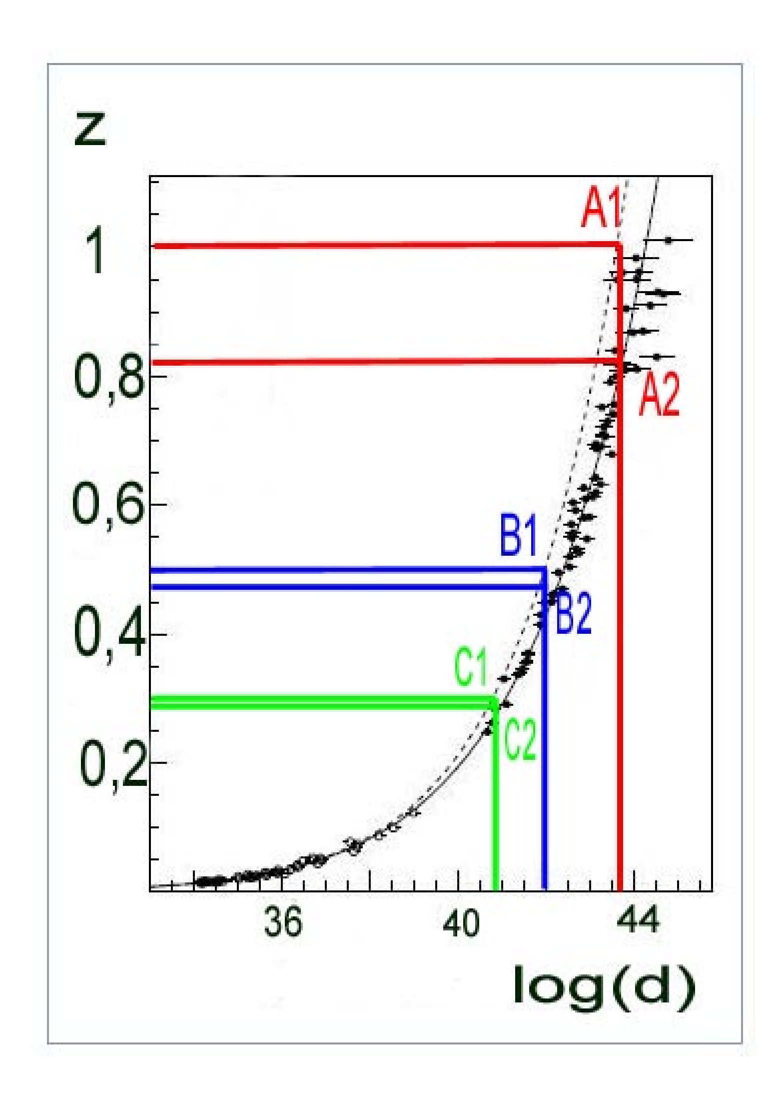
Dans la figure suivante, nous avons appliqué cette correction à trois points $A1$, $B1$, $C1$.

Pour le point $A1$, le redshift calculé par le modèle standard est $z_1 = 1$; son redshift corrigé est : $z_2 = e^{\frac{3}{5}} - 1 \approx 0,82$, donc le point corrigé est en $A2$.

Pour le point $B1$, le redshift calculé par le modèle standard est $z_1 = 0,5$; son redshift corrigé est : $z_2 = e^{\frac{5}{13}} - 1 \approx 0,47$, donc le point corrigé est en $B2$.

Pour le point $C1$, le redshift calculé par le modèle standard est $z_1 = 0,3$; son redshift corrigé est : $z_2 = e^{\frac{69}{269}} - 1 \approx 0,29$, donc le point corrigé est en $C2$.

Curieusement, les points corrigés tombent sur la courbe réellement observée !



Nous voyons donc qu'un modèle mathématique d'une simplicité extrême permet de modéliser l'expansion de l'univers (ou sa phase actuelle ?), sans nécessiter le recours à l'inflation ni à l'énergie sombre, sans faire apparaître ces "artefacts" que sont (ou semblent être ?) la singularité initiale, et l'horizon des événements ; des artefacts qui pourraient bien résulter du pari d'Einstein...

Dans le modèle standard, le redshift (z_1) tend vers $+\infty$ quand la distance l tend vers $\frac{c}{H}$, comme le montre bien la formule $1+z_1 = \sqrt{\frac{1+\frac{H.l}{c}}{1-\frac{H.l}{c}}}$. Si on prend $H \approx 71,4\ km.s^{-1}.Mpc^{-1}$, sachant que $1Mpc \approx 3,26.10^6\ AL$, on trouve : $\frac{c}{H} \approx 4200\ Mpc \approx 13,7.10^9\ AL$ (distance de l'"horizon"). Dans la figure ci-dessus, la courbe en pointillé (calculée selon ce modèle) admet une asymptote verticale pour $l \approx 13,7.10^9\ AL$. Mais en est-il de même de la courbe réelle

(en trait plein) ? Il est permis d'en douter. Si nous prenons comme hypothèse de travail la formule $w = H.l$ (formule de Hubble homogénéisée), alors, pour $l = \frac{c}{H} \approx 13,7.10^9\ AL$, nous trouvons : $z_2 = e^1 - 1 \approx 1,718...$ seulement !

La plus lointaine galaxie actuellement connue (janvier 2013) est MACS1149-JD, dont le redshift est 9,6 ; sa distance serait alors : $l = \frac{c}{H}.Log\ 9,6 \approx 2,26\frac{c}{H} \approx 31.10^9\ AL$, alors que le calcul basé sur le modèle standard donne une distance de $13,2.10^9\ AL$.

Quant au fonds diffus cosmologique, son redshift est estimé à 1100 environ ; d'après notre formule (basée sur le redshift corrigé) : $l = \frac{c}{H}.Log\ 1100 \approx 7\frac{c}{H} \approx 95,9.10^9\ AL$. Selon l'interprétation classique, ce rayonnement de corps noir aurait été émis à l'époque de la recombinaison, lorsque le gaz qui rempissait l'univers est devenu transparent pour la lumière. Si nous admettons cette interprétation, notre calcul signifie que les astronomes devraient rencontrer le "mur de l'opacité" (opacité pour la lumière, pas pour les neutrinos !) à une distance de $96.10^9\ AL$ environ. La galaxie MACS1149-JD serait donc située à peu près au tiers de cette distance. Le calcul classique, basé sur le modèle standard, donne, pour cette galaxie, une distance supérieure à 96% de la distance du mur de l'opacité ; ce qui soulève la question délicate de la vitesse de formation des galaxies, immédiatement après l'époque de la recombinaison : les gaxies lointaines, comme MACS1149-JD, auraient dû se former en moins de 500 millions d'années... Dans le modèle du redshift corrigé, au contraire, elles seraient le résultat d'une très longue évolution, de 65 milliards d'années (à partir de la recombinaison) ! Ce qui laisse une appréciable marge de manœuvre aux théoriciens...

Amusons-nous à examiner l'éclairage apporté par la formule $w = H.l$ (formule de Hubble homogénéisée) au paradoxe d'Olbers : pourquoi le ciel est-il noir la nuit ? Imaginons un univers euclidien (infini), peuplé de galaxies réparties uniformément, de manière homogène. Notons n_l le nombre de photons nous parvenant, pendant une unité de temps, d'une distance inférieure à l, et dn_l le nombre de photons nous parvenant, pendant le même temps, d'une distance comprise entre l et $l + dl$. Si l'univers était statique, le nombre de galaxies dont la distance est comprise entre l et $l+dl$ serait proportionnel à l^2, et la probabilité pour qu'un photon émis par l'une de ces galaxies nous parvienne serait inversement proportionnelle à l^2 ; on aurait donc : $dn_l = K.dl$, où K est une constante (qui dépend du nombre de galaxies par unité de volume, et de leur luminosité moyenne), et, par suite, $n_l = K.l$. Ces hypothèses impliquent donc que le nombre de photons reçus pendant une unité de temps tend vers l'infini quand l tend vers l'infini : c'est le fameux paradoxe d'Ol-

bers. Supposons maintenant que les galaxies s'éloignent selon la loi ci-dessus (loi de Hubble homogénéisée). Entre l'émission et la réception, la longueur d'onde d'un rayonnement est modifiée selon la loi : $\lambda_r = e^{\frac{H.l}{c}}.\lambda_e$, ce qui donne, pour la période : $T_r = e^{\frac{H.l}{c}}.T_e$, et, pour la fréquence : $\nu_r = e^{-\frac{H.l}{c}}.\nu_e$. Ceci signifie non seulement que les photons provenant d'une distance l auront une fréquence d'oscillation réduite, mais aussi qu'ils seront plus espacés, comme si le temps s'écoulait plus lentement pour les galaxies les plus lointaines. On aura donc :

$$dn_l = K.e^{-\frac{H.l}{c}}.dl \ ;$$

$$n_l = K.\left[-\frac{c}{H}.e^{-\frac{H.l}{c}}\right]_{l=0}^{l} = -K.\frac{c}{H}.\left(e^{-\frac{H.l}{c}} - 1\right) = K.\frac{c}{H}.\left(1 - e^{-\frac{H.l}{c}}\right).$$

Cette formule montre clairement que n_l est borné : sa limite, quand l tend vers l'infini, est $K.\frac{c}{H}$.
On voit donc que la formule de Hubble homogénéisée permet de résoudre le paradoxe d'Olbers d'une manière particulièrement simple. On pourrait améliorer le calcul en faisant intervenir non seulement le nombre de photons reçus, mais aussi leur énergie (qui décroît selon la même courbe). Un autre élément à prendre en compte est l'existence (supposée) du "mur de l'opacité".

Nous allons maintenant ouvrir une courte parenthèse sur un tout autre sujet : il s'agit de la flèche du temps. La formule de Hubble homogénéisée ($w = H.l$) entraîne des conséquences inattendues. En voici une, qui nous éloigne peut-être de notre sujet, mais qui est assez amusante pour être signalée : dans un tel univers en expansion, le nombre d'oscillations d'une onde lumineuse est nécessairement fini.

Considérons un rayon lumineux quelconque, appelons λ_0 sa longueur d'onde initiale, T_0 sa période, ν_0 sa fréquence, E_0 son énergie (toutes initiales, évaluées par un observateur immobile) ; ces quantités varient sur son parcours : après un déplacement sur une distance l (correspondant à une récession w), la longueur d'onde (évaluée par un observateur local) sera λ. On note N le nombre d'oscillations de l'onde sur ce parcours. On a : $dN = \frac{dl}{\lambda}$, $dl = \frac{dw}{H}$ et $\lambda = \lambda_0.e^{\frac{w}{c}}$, donc :

$$dN = \frac{dl}{\lambda} = \frac{dw}{H.\lambda_0.e^{\frac{w}{c}}} = \frac{1}{H.\lambda_0}.e^{-\frac{w}{c}}.dw = -\frac{c}{H.\lambda_0}.d\left(e^{-\frac{w}{c}}\right).$$

Intégrons sur un parcours allant de l'origine ($l = 0$, $w = 0$) jusqu'à un point quelconque (distance : l, vitesse de récession : w) ; il vient :

$$N = -\frac{c}{H.\lambda_0}.\left[e^{-\frac{w}{c}} - 1\right] = \frac{c}{H.\lambda_0}.\left[1 - e^{-\frac{w}{c}}\right].$$

Si nous faisons tendre l vers l'infini (donc w aussi), nous obtenons :

$$N = \frac{c}{H.\lambda_0} = \frac{1}{H.T_0} = \frac{\nu_0}{2\pi H} = \frac{E_0}{2\pi.h.H}.$$

Ceci signifie qu'un rayon lumineux d'énergie E possède un "capital d'oscillations" : $N = \frac{E}{2\pi.h.H}$; ce capital étant limité ! Lorsque l'onde "dépense" ΔN oscillations, son énergie diminue : $\Delta E = -2\pi.h.H.\Delta N$.

Si on prend $\frac{c}{H} \approx 4200\ Mpc \approx 13,7.10^9\ AL \approx 1,3.10^{26}\ m$, pour $\lambda_0 = 1\ m$, on obtient : $N \approx 1,3.10^{26}$ oscillations ; pour $\lambda_0 = 1\ cm$, on obtient : $N \approx 1,3.10^{28}$ oscillations, et ainsi de suite.

Chacun pourra réfléchir à cette étrange conclusion... On pourra se demander, en particulier, si l'énergie perdue est récupérée par le vide quantique, et sous quelle forme. Mais notre but n'est pas de résoudre le problème de l'expansion de l'univers : nous ne savons même pas si elle est régie par la gravitation ! Et nous ne savons pas non plus si le coefficient H est rigoureusement constant, ou s'il varie selon des lois que nous ignorons... Fermons donc cette parenthèse, et laissons ces questions en suspens.

Aucune théorie ne donne, pour le moment, d'explication claire de l'expansion de l'univers basée sur des lois physiques connues ; on pourrait orienter la réflexion dans différentes directions. En voici quatre, à titre d'exemples :

- La première consiste à chercher un "aménagement" du modèle standard, pour permettre à la théorie du big bang de se rapprocher davantage de la réalité ; mais, comme on l'aura compris, ce pari n'est pas gagné d'avance...

- Une seconde option fait de l'expansion un phénomène local et conjoncturel : la partie visible de l'univers est actuellement dans une phase d'expansion, pour des raisons qu'il faudrait rechercher dans son histoire passée (encore insuffisamment connue) ; mais cette expansion peut accélérer, ralentir, s'arrêter, s'inverser, tandis que dans d'autres régions de l'univers, d'autres phénomènes sont peut-être en cours... Personne ne sait si la constante de Hubble est vraiment constante : est-elle stable dans le temps ? Est-elle la même dans toutes les parties de l'univers ? Ces questions sont, pour le moment, sans réponse.

- Troisième direction : s'il est vrai que l'"espace crée de l'espace", on peut imaginer que c'est une propriété intrinsèque, fondamentale, du vide quantique. Celui-ci est le siège de créations et d'annihilations continuelles de paires de particules et d'antiparticules. Il est possible que ces phénomènes

inverses soient affectés de probabilités légèrement différentes ; cette "brisure de symétrie" pourrait être à l'origine de l'expansion. Dans ce cas, la "flèche du temps" serait profondément enracinée dans la structure même du vide quantique, et il faudrait oublier la symétrie T...

- Une quatrième direction est inspirée par la thermodynamique et la théorie de l'information, qui partagent une notion commune : l'entropie. Il se trouve que nous avons parlé de l'information dans la section sur la propagation de la gravité : nous avons évoqué l'hypothèse du partage d'informations entre différentes particules, en nous appuyant sur les notions d'intrication, de cohérence, ou de non-localité. La cohérence est une forme d'ordre codé par une information ; la décohérence est une dégradation de l'ordre (ou de l'information), et s'accompagne d'une augmentation de l'entropie. On peut se demander si l'augmentation apparente des distances n'est pas seulement une dégradation des liens entre les corps massifs (ou entre les particules virtuelles qui constituent le vide). Dans ce cas, le moteur de l'expansion de l'univers serait la croissance de l'entropie. La "flèche du temps" serait alors enracinée dans la thermodynamique du vide quantique, et l'expansion serait un phénomène inévitable et essentiellement irréversible.

49 La matière noire existe-t-elle ?

Le problème de la matière noire n'a rien à voir avec celui de l'énergie sombre. A l'origine, il a été soulevé par l'étude de la courbe de rotation des galaxies. On peut, en première approximation, modéliser une galaxie spirale comme un disque en rotation, formé d'étoiles tournant toutes sur des orbites circulaires, à une vitesse variable selon la distance au centre. La mesure de la vitesse des étoiles se fait par effet Doppler. On s'aperçoit que la vitesse angulaire est constante (donc que la vitesse linéaire est proportionnelle à la distance au centre), à partir du centre de la galaxie jusqu'à une distance critique. On peut donc dire qu'une grande partie de la galaxie tourne à la manière d'un solide. Au-delà de la distance critique, la vitesse angulaire décroît, mais la vitesse linéaire, elle, décroît très peu, et se stabilise. D'autre part, l'étude du nombre, de la nature et de la répartition des étoiles visibles permet une première évaluation de la masse en fonction de la distance au centre. Cette évaluation est ensuite affinée en prenant en compte le "trou noir" central de la galaxie, les nuages de gaz et de poussières, les étoiles mortes, planètes, corps de toutes sortes, pour la plupart invisibles, dont la présence est certaine, mais dont l'abondance est difficile à estimer. Ensuite,

on calcule, selon les lois de la gravitation, la courbe de rotation théorique de la galaxie, puis on la compare à la courbe mesurée. On constate alors que les deux courbes sont bien différentes ; entre autres différences, la courbe calculée montre une décroissance très rapide de la vitesse linéaire au-delà de la distance critique. Et lorsqu'on cherche à expliquer ce décalage, une remarque s'impose tout naturellement : la courbe calculée se rapprocherait beaucoup plus de la courbe mesurée si on supposait que la masse évaluée a été très fortement sous-estimée. Et la même conclusion revient pour toutes les galaxies étudiées ! Et pas seulement pour les galaxies : l'étude des amas globulaires montre aussi des anomalies de même nature.

Les astronomes ont passé en revue et estimé le plus précisément possible tous les oublis pouvant expliquer cette sous-évaluation de la masse totale, et, tous les calculs ayant été refaits, ils ont été obligés de confirmer qu'il y a bien une masse manquante, actuellement évaluée à 80% de la masse totale de l'univers (soit quatre fois plus que la matière "conventionnelle") !

De nombreuses hypothèses ont été formulées pour expliquer cette masse manquante, par exemple l'existence de particules massives inconnues interagissant peu avec la matière ordinaire (WIMP : weakly interacting massive particles). La théorie MOND a également été imaginée pour résoudre ce problème : cette théorie de la gravitation suppose que l'attraction est en $\frac{1}{r^2}$ pour des distances modérées (dans le système solaire par exemple), en $\frac{1}{r}$ au-delà.

La rotation des galaxies est un phénomène complexe : il est possible que des explications très diverses contiennent une part de vérité. Mais, dans le cadre du travail qui nous occupe, il y en a une qu'il me semble intéressant de mettre en avant : c'est le rôle de l'entraînement des référentiels (effet Lense-Thirring).

Dans la partie centrale de la galaxie, qui tourne comme un solide, les référentiels inertiels ("gravitationnellement immobiles") doivent tourner aussi ! Pourquoi ? L'explication est simple. Plaçons-nous en un point P quelconque à l'intérieur d'une galaxie. En ce point s'exerce l'influence d'un grand nombre d'étoiles e_i, sous la forme : $\sum_i x_i.\left(ch\frac{\vec{w}_i}{c} + sh\frac{\vec{w}_i}{c}\right) = x.\left(ch\frac{\vec{w}}{c} + sh\frac{\vec{w}}{c}\right)$. Nous supposerons que cette "influence" est exprimée par le quadrivecteur potentiel, dont nous avons déjà parlé ; mais ce n'est qu'une hypothèse ! On peut penser que c'est la contribution gravitationnelle des étoiles proches qui doit être dominante au point P. Si les positions et les vitesses de ces étoiles étaient réparties aléatoirement par rapport à P, la somme vectorielle ("impulsion") $x.sh\frac{\vec{w}}{c}$ devrait s'annuler. Mais les mouvements des étoiles dans la galaxie sont

ordonnés, et les vitesses des étoiles proches sont orientées sensiblement dans la même direction. Pour cette raison, au point P, la résultante du champ gravitationnel ne s'annule pas ; et c'est sa partie "énergie" $x.sh\frac{\overline{w}}{c}$ (vecteur à trois dimensions) qui définit l'entraînement des référentiels inertiels locaux (effet Lense-Thirring intégral).

Il en résulte que, par rapport à leurs repères inertiels locaux, les étoiles tournent moins vite que ne pourrait le croire un observateur situé loin de cette galaxie ! Si cette déduction est exacte, alors la force centrifuge générée par leur mouvement orbital autour du centre galactique pourrait avoir été surestimée par les observateurs distants (car le calcul des orbites doit se faire dans un repère inertiel local, et non dans un repère inertiel lié à l'observateur) ; par conséquent, la force centripète due à la gravité (qui est équivalente à la précédente, mais de sens contraire) a dû être sous-estimée dans les mêmes proportions ; il se pourrait donc que la masse manquante, invoquée pour expliquer les orbites des étoiles, ne soit plus nécessaire...

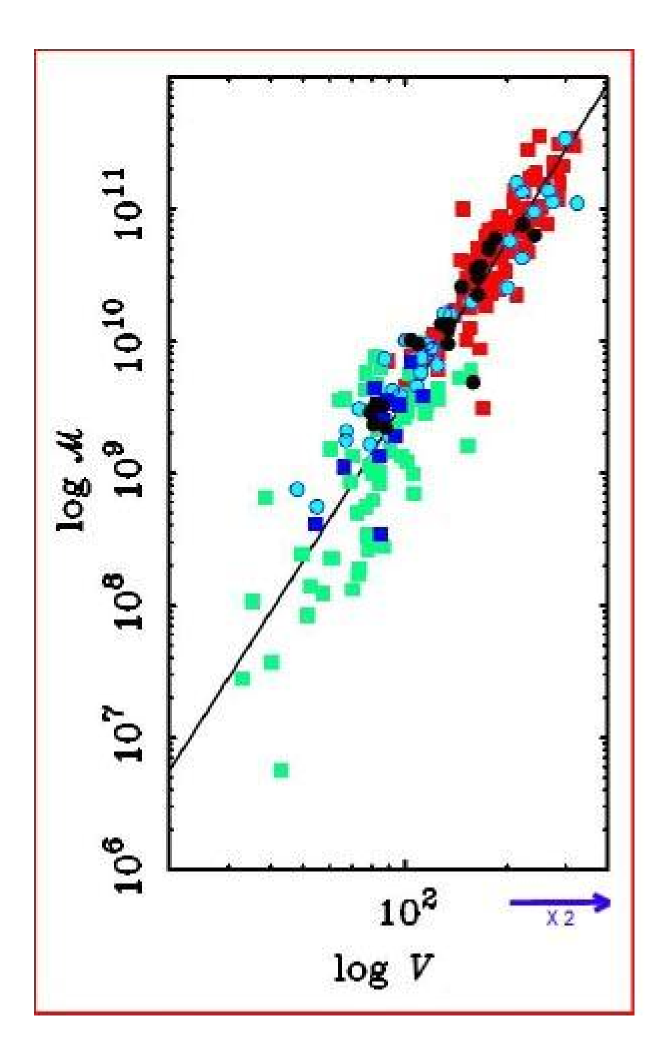
Nous avons expliqué précédemment, de manière détaillée, les raisons qui suggèrent d'utiliser un quadrivecteur lorentzien pour définir la composition des potentiels ; l'étude de la rotation des galaxies pourrait être le laboratoire idéal pour mesurer et tester l'effet Lense-Thirring intégral, et, par conséquent, pour mieux comprendre le mécanisme profond de la composition des potentiels.

50 Que signifie la loi de Tully-Fisher ?

Dans le cadre de la relativité générale, la vitesse de rotation des galaxies ne peut pas s'expliquer sans faire appel à la matière noire. Mais l'existence de cette matière noire est contredite par la loi de Tully-Fisher.

Rappelons ce qu'est la loi de Tully-Fisher. On sait que la vitesse angulaire (ω) de rotation des galaxies est constante, depuis le centre jusqu'à une distance limite (l), où elle se stabilise, avant de décroître. La vitesse (V) des étoiles, mesurée par effet Doppler, est donc proportionnelle à la distance au centre (r), jusqu'à la distance limite (l), où elle atteint sa valeur maximale (V_l). Cette vitesse maximale a été mesurée pour de nombreuses galaxies. D'autre part, la masse (M) de ces galaxies a été évaluée de manière conventionnelle (à partir du nombre d'étoiles et de la quantité de gaz et de poussières), sans recours à la matière noire. Et l'analyse des résultats conduit

à cette formule empirique : $V_l^4 = a_0.G.M$, où a_0 est une constante. Si on préfère, on peut écrire : $log\ M \approx 4.log\ V + constante$. La masse (conventionnelle, ou baryonique) des galaxies est proportionnelle à la puissance quatrième de la vitesse maximale V_l.



Jusqu'à présent, la relativité générale est incapable de justifier cette loi. Mais surtout, elle prévoit que la rotation des galaxies doit être dictée essentiellement par l'abondance et la répartition de la matière noire, qui doivent varier de manière considérable selon le type de galaxie. Par conséquent, si la loi de Tully-Fisher fonctionne pour un type de galaxie, on s'attend à la prendre en défaut en étudiant des galaxies d'un type différent. Mais ce n'est pas le cas : la loi fonctionne pour tous les types de galaxies, et se moque de la matière noire !

Je vais proposer ici un petit calcul très simplifié, qui n'est pas censé résoudre le problème, mais seulement le replacer dans le cadre que nous avons défini : est-il possible que la rotation des galaxies et la loi de Tully-Fisher soient en relation avec la vitesse d'entraînement, telle que nous l'avons définie dans la section sur la composition des potentiels ?

Nous allons baser notre raisonnement sur la distinction entre V_{dist} (vitesse des étoiles mesurée par un observateur distant), V_e (vitesse d'entraînement des référentiels inertiels, définissant l'"immobilité gravitationnelle"), et V_{loc} (vitesse locale, mesurée par rapport à un repère local gravitationnellement immobile). On aura donc : $\vec{V}_{dist} = \vec{V}_e + \vec{V}_{loc}$.

Etudions la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$, qui est liée au "quadrivecteur potentiel", que nous avons défini précédemment. Tout nous porte à croire que, dans la région centrale de la galaxie, cet entraînement est produit essentiellement par la galaxie elle-même ; la composante due au reste de l'univers est vraisemblablement négligeable. Chaque étoile va subir, tout d'abord, l'entraînement de ses voisines, constituant sa banlieue galactique plus ou moins proche. Dans cette banlieue, les vecteurs vitesse des étoiles sont sensiblement égaux, de sorte que chaque étoile pourrait être considérée comme gravitationnellement immobile, si cette banlieue était la source unique de l'entraînement. On aurait alors : $\vec{V}_e = \vec{V}_{dist}$. Mais ce n'est pas le cas, car il existe une autre source essentielle d'entraînement : c'est le bulbe galactique (ou simplement la région centrale), où se concentre une partie importante de la masse. Notons M_b la masse de ce bulbe. Par rapport à une étoile située à la distance r du centre, et se déplaçant à la vitesse $\vec{V}_{dist}$, ce bulbe a pour impulsion $-M_b.\vec{V}_{dist}$, et l'entraînement produit est proportionnel à $-\frac{M_b.\vec{V}_{dist}}{r}$. En définitive, la résultante des deux entraînements est de la forme : $\vec{V}_e = \alpha\vec{V}_{dist} - \frac{\beta.\vec{V}_{dist}}{r}$, où α et β sont deux coefficients compris entre 0 et 1. Il est clair que β dépend de la masse M_b du bulbe galactique. Quant à α, c'est un coefficient qui peut être très supérieur à $\frac{\beta}{r}$, surtout si la densité de matière dans la banlieue de l'étoile considérée est élevée, mais aussi lorsque r est grand. Nous admettrons, par facilité, que $\alpha \approx 1$.

Intéressons-nous maintenant à la vitesse locale $\vec{V}_{loc}$, qui est la "véritable vitesse", au sens gravitationnel du terme. Nous allons considérer la galaxie comme un disque de centre O, en équilibre gravitationnel, composé d'étoiles tournant sur des orbites circulaires, et nous allons noter $M(r)$ la masse incluse dans un cercle de centre O et de rayon r. D'après ce que nous avons vu dans la section sur la vitesse circulaire, on doit avoir : $V_{loc} = \sqrt{\frac{G.M(r)}{r}}$, donc

$M(r) \approx \frac{V_{loc}^2.r}{G}$.

D'autre part : $V_{loc} = V_{dist} - V_e \approx V_{dist} - \left(V_{dist} - \frac{\beta.V_{dist}}{r}\right) = \frac{\beta.V_{dist}}{r}$, donc :

$$V_{loc} \approx \beta.\omega.$$

Ceci signifie que la vitesse propre (vitesse locale, ou vitesse gravitationnelle) de chaque étoile compense exactement le "contre-entraînement" dû au bulbe galactique. La définition de ce bulbe est d'ailleurs secondaire : l'important, c'est que V_{loc} soit proportionnel à ω.

En faisant la substitution dans l'égalité précédente, nous obtenons :

$$M(r) \approx \frac{V_{loc}^2.r}{G} \approx \frac{\beta^2.\omega^2.r}{G}.$$

Nous avons dit que la plus grande partie de la galaxie tourne comme un solide, et que la vitesse angulaire ω est donc constante (sauf à la périphérie) ; mais ceci est, bien sûr, le résultat d'une longue histoire, qui remonte probablement aux premiers âges de la galaxie (peut-être même avant la formation des premières générations d'étoiles) : compte-tenu des contraintes imposées par la gravitation et l'entraînement des référentiels, la répartition des masses et des vitesses tend progressivement vers cette position d'équilibre, que nous supposerons atteinte.

On peut remarquer que $M(r)$ est proportionnel à r. Par conséquent, si M est la masse totale de la galaxie, on voit apparaître un rayon maximal : $R = \frac{G.M}{\beta^2.\omega^2}$; ce qui montre que l'équilibre défini par cette formule est nécessairement limité dans l'espace : il est instable à la périphérie.

Cet équilibre étant exprimé sous la forme : $M(r) \approx \frac{\beta^2.\omega^2.r}{G}$, calculons la densité $\rho(r)$ (masse/surface) à la distance r du centre :

$$\rho(r) = \frac{dM(r)}{2\pi r\ dr} \approx \frac{\beta^2.\omega^2}{2\pi.G.r},$$

ou, inversement :

$$r \approx \frac{\beta^2.\omega^2}{2\pi.G.\rho(r)}.$$

Reportons ce résultat dans l'expression de $M(r)$:

$$M(r) \approx \frac{\beta^2.\omega^2}{G}.r \approx \frac{\beta^2.\omega^2}{G}.\frac{\beta^2.\omega^2}{2\pi.G.\rho(r)} \approx \frac{\beta^4.\omega^4}{2\pi.G^2.\rho(r)} \approx \frac{V_{loc}^4}{2\pi.G^2.\rho(r)}.$$

Cette formule est (approximativement) valable dans une partie seulement de la galaxie. A partir d'une certaine distance au centre (l), la densité atteint une valeur critique ρ_c (que nous supposerons identique pour toutes les galaxies) au-dessous de laquelle l'entraînement dû à la galaxie elle-même devient trop faible pour imposer sa loi : l'ensemble des étoiles ne tourne plus comme un solide, et il n'est plus possible de négliger l'entraînement dû au reste de l'univers. En-deçà de cette distance limite l, on se trouve dans le domaine "privé" de la galaxie : son champ gravitationnel (quadrivectoriel) est dominant et régit la distribution et le mouvement de la matière. Au-delà, on commence à aborder le domaine intergalactique. A partir de cette limite, l'équilibre qui a servi de base à notre calcul est rompu, et la vitesse angulaire commence à décroître ; l'entraînement V_e décroît aussi, et tend progressivement vers 0, et, puisque $V_{loc} = V_{dist} - V_e$, on a (à partir d'une certaine distance) $V_{dist} \approx V_{loc}$: la vitesse mesurée par l'observateur distant tend à s'identifier à la vitesse locale (ou vitesse gravitationnelle). Posons : $V_{loc} = \lambda(l).V_{dist}$; on a alors :

$$M(l) \approx \frac{V_{loc}^4}{2\pi.G^2.\rho_c} \approx \frac{\lambda(l)^4.V_{dist}^4}{2\pi.G^2.\rho_c}.$$

En posant $a_0 = \frac{2\pi.G.\rho_c}{\lambda(l)^4}$, nous obtenons : $V_{dist}^4 \approx a_0.G.M(l)$, donc $log\ M \approx 4.log\ V_{dist} + constante$.

C'est la loi de Tully-Fisher !

Oui, mais il reste un problème à résoudre : lorsque la densité atteint la valeur critique ρ_c (donc pour $r = l$), rien ne permet d'affirmer que le coefficient $\lambda = \frac{V_{loc}}{V_{dist}}$ prenne une valeur $\lambda(l)$ identique pour toutes les galaxies ; on sait seulement qu'il tend vers 1 par valeurs inférieures, lorsqu'on quitte le domaine privé de la galaxie pour pénétrer dans le milieu intergalactique. Supposons que la valeur de $\lambda(l)$ varie, selon les galaxies, entre des limites "raisonnables", par exemple entre $0,4$ et $0,8$. Comme la droite qui établit la loi de Tully-Fisher est basée sur une échelle logarithmique, cette dispersion des valeurs de $\lambda(l)$ (qui varient, dans notre exemple, du simple au double) va entraîner une dispersion des valeurs de V, dans les mêmes proportions (du simple au double, soit un déplacement, selon l'axe des abscisses, d'amplitude indiquée par la flèche bleue que nous avons ajoutée en bas à droite du graphique). Ceci peut élargir le nuage de points, et décaler la droite selon l'axe des abscisses, mais sans changer sa pente (qui sera toujours égale à 4), donc sans dénaturer la loi de Tully-Fisher.

Remarquons aussi que, pour $\lambda(l) = 0,41$, on a $\frac{V_{dist}}{V_{loc}} \approx \frac{1}{0,41} \approx 2,44$, ce qui signifie qu'un observateur distant, qui mesure V_{dist} en croyant mesurer

V_{loc}, surestime la vitesse réelle d'un facteur $2,44$; par conséquent, s'il utilise la formule $V = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$, ou $M = \frac{V^2.r}{G}$, il va surestimer la masse d'un facteur $2,44^2 \approx 5,9$: dans ce cas, la masse réelle ne représenterait que $\frac{100}{5,9} \approx 17\%$ de la masse évaluée, donc la masse manquante serait une pure illusion. Mais, bien entendu, rien ne nous permet d'affirmer que $\lambda(l)$ soit précisément égal à $0,41$...

Notre raisonnement ne prouve rien, car il contient des approximations beaucoup trop importantes, des inconnues, et des hypothèses mal étayées ; chacun pourra le réfuter, ou l'améliorer ! Mais il montre tout de même que, lorsqu'on se libère du cadre strict imposé par la relativité générale, on voit s'ouvrir des perspectives qui méritent d'être explorées. Le pari d'Einstein ne peut pas nous l'interdire !

51 Pour terminer ...

Je n'ai pas cherché ici à construire une théorie de plus, mais à faire un élagage, dans le but de dégager une "gravitation relativiste minimale", basée sur des idées simples et suffisamment robustes, selon moi, pour servir de base à de futures recherches. C'est l'économie des moyens qui a guidé ma démarche. Il m'a semblé que ce "tronc commun" méritait d'être connu pour plusieurs raisons :

- la première, c'est qu'il est facile à comprendre. Toutes les idées sur lesquelles il se base sont élémentaires : la loi de la gravitation universelle de Newton est prise au pied de la lettre, ses conséquences sont recalculées selon la relativité restreinte, et le paradoxe de Schild est résolu de la manière la plus "basique" qui soit. La relativité générale, au contraire, a la réputation d'être une théorie sophistiquée et abstraite !

- la seconde, c'est que chaque idée se justifie de manière simple et naturelle, jamais arbitraire ;

- la troisième, c'est la cohérence de l'ensemble : toutes les pièces du puzzle s'imbriquent si naturellement qu'il est difficile de croire que ce soit par le simple effet du hasard ...

- la quatrième, c'est que ce "modèle" permet de retrouver tous les résultats classiques de la relativité générale (effet Einstein, précession du périhélie

de Mercure, déviation de la lumière par le Soleil, effet Shapiro) avec des hypothèses minimales ; je dois dire que j'ai été moi-même très étonné de voir sortir, les unes après les autres, à partir d'idées aussi simples, toutes les formules qui ont fait la gloire de la théorie d'Einstein !

- la cinquième, c'est qu'il est ouvert, car il ne s'appuie sur aucun principe rigide, et peut donc être revu et corrigé en fonction des observations futures ;

- la sixième, c'est qu'il permet d'établir facilement des passerelles vers la mécanique quantique ;

- la septième, c'est qu'il m'a donné l'occasion de rappeler une chose que les spécialistes savent, mais disent peu : il existe plusieurs théories qui expliquent, aussi bien que la relativité générale, l'ensemble des observations faites dans le système solaire, mais dont les prédictions sont bien différentes dans le domaine des champs forts ;

- la huitième, c'est que des pans entiers de l'astrophysique moderne (concernant, en particulier, les trous noirs et le big bang) sont basés sur un pari : celui qui consiste à admettre, sans preuve, le principe d'équivalence fort. Si ce principe venait à être réfuté, ils s'écrouleraient comme un château de cartes !

- la neuvième, c'est qu'il me semble que, depuis plus de cinquante ans, les théories abstraites ont pris trop d'avance sur l'expérimentation et l'observation, se sont déconnectées de la réalité, et se sont trop souvent fourvoyées (mais il y a, heureusement, depuis peu, un rééquilibrage qui s'amorce). L'approche proposée ici est censée montrer que beaucoup de problèmes sont ouverts, dont plusieurs pourraient être résolus par des expériences simples et concrètes.

Pour terminer, rappelons qu'Einstein n'a jamais dit : "je suis sûr que la théorie de la relativité générale est juste, parce-que je l'ai prouvé" ; il a dit : "je crois que cette théorie est juste, parce-qu'elle est belle". Il n'a jamais pris de telles précautions avec la théorie de la relativité restreinte, ni avec son étude de l'effet photoélectrique : dans ces deux cas, il savait que le doute n'était pas permis, et que sa démonstration était imparable.

J'espère que cette étude aura offert à quelques amateurs de physique ou d'astronomie, étudiants ou autodidactes, un marche-pied vers la gravitation relativiste. J'ai essayé de leur présenter cette discipline de la manière la moins dogmatique possible : moins difficile qu'on ne le dit, plus ouverte, et inache-

vée. S'ils en retirent une vision claire des points forts et, éventuellement, des limites de la relativité générale, et surtout l'envie d'approfondir un sujet que je crois très riche, j'aurai atteint mon but.

52 Liens

Voici les adresses de quelques sites où on pourra trouver des informations sur la relativité générale, et sur tous les sujets que nous avons évoqués :

Le site Sciences.ch est un monde à lui seul :

Sciences.ch - Relativité Générale

On trouvera toute une série d'études dans ce site de la commission cosmologie de la SAF :

Cosmologie - Société Astronomique de France

Je me suis inspiré des pages de Christian Magnan sur la précession du périhélie de Mercure et sur la déflexion de la lumière, mais son site contient bien d'autres choses à découvrir :

La cosmologie

Déviation de la lumière

Précession de Mercure

Horizon

Plusieurs articles de de Loïc Villain (dans Futura-Sciences) :

Relativité restreinte et naissance de l'espace-temps

Relativité générale - Comment l'espace-temps devint dynamique

Gravitation relativiste, ondes gravitationnelles, trous noirs, par Eric Gourgoulhon (LUTH) :

La gravitation relativiste

Sur les astres compacts (même auteur) :

Etoiles à neutrons et trous noirs

Un article de Blanchet (CNRS) sur les pulsars binaires (surtout PSR 1913+16) :

PSR 1913+16

Egalement sur le pulsar binaire PSR 1913+16 :

PSR 1913+16

Encore sur le pulsar binaire PSR 1913+16 :

PSR 1913+16

Sur le pulsar binaire PSR B1534+12 :

PSR B1534+12

Sur le pulsar binaire PSR J1141-6545 :

PSR J1141-6545

Sur le pulsar binaire PSR J0737-3039 :

PSR J0737-3039

Sur le pulsar binaire PSR B1534+12 :

PSR B1534+12

Sur le pulsar binaire PSR J0437-4715 :

PSR J0437-4715

Sur les pulsars binaires et la gravitation :

Pulsars binaires

Encore sur les pulsars et la relativité générale :

Pulsars binaires

Sur les naines blanches binaires :

Naines blanches binaires

Sur les étoiles à neutrons (dossier Astrofiles) :

Etoiles à neutrons

Un dossier de l'Internaute sur les trous noirs :

Trous noirs

Une présentation critique des différentes théories de la gravitation :

Théories de la gravitation

Une autre étude critique des théories de la gravitation :

Théories de la gravitation

Dans la version anglophone de Wikipedia, une étude détaillée sur les théories concurrentes de la relativité générale :

Alternatives to general relativity

... et sur les tests de la relativité générale :

Tests of general relativity

Egalement sur les tests de la relativité générale :

Spacetime

Une étude très approfondie sur les théories de la gravitation :

Relativity - livingreviews

Sur l'anomalie Pioneer :

Pioneer

Sur le principe de Mach et l'effet Lense-Thirring :

Mach

Un document sur les supernovæ et l'énergie noire, Regnault & coll. :

Les supernovæ et l'énergie noire

Les travaux de Mac Gaugh sur la loi de Tully-Fischer :

Loi de Tully-Fisher

Exposé des idées d'Erik Verlinde :

On the Origin of Gravity and the Laws of Newton